

Physik II

Elektrizitätslehre

Gerhard Franz

ISBN 978-3-981-24723-7

14. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematik	1
1.1	Vektoranalysis	1
1.1.1	Gaußscher Satz	1
1.1.2	Stokesscher Satz	2
1.1.3	Fehlerrechnung	5
1.1.3.1	Normalverteilung.	5
1.1.3.2	Fehlerfortpflanzung.	8
1.1.3.3	Lineare Regression.	8
1.2	Aufgaben und Lösungen	9
1.2.1	Gradient	9
1.2.2	Divergenz	12
1.2.3	Rotation	13
1.2.4	Fehleranalyse	15
2	Elektro-Magnetismus	23
2.1	Die elektrische Kraft	23
2.2	Magnetismus	25
2.3	Superposition und Magnetismus	26
3	Elektrostatik	29
3.1	Maxwell-Gleichungen	29
3.2	Das Coulombsche Gesetz und das elektrische Feld	30
3.2.1	Ladungsdichte	31
3.2.1.1	Superpositionsprinzip.	31
3.3	Elektrisches Potential	32
3.4	Die elektrische Feldstärke als Flußdichte	34
3.5	Elektrische Felder	34
3.5.1	Homogen geladene Kugel	34
3.5.2	Unendlich langer Draht	35
3.5.3	Homogen geladene Ebene (Blatt)	36
3.5.4	Feld zwischen zwei homogen geladenen Ebenen	37
3.5.5	Innerhalb eines elektrischen Leiters	37
3.5.6	Innerhalb eines metallischen Hohlraums	37

3.6	Aufgaben und Lösungen	38
4	Potential und elektrisches Feld	47
4.1	Dipolpotential	47
4.1.1	Approximatives Dipolpotential	47
4.1.2	Das elektrische Feld eines Dipols	50
4.2	Influenz und Bildkraft	52
4.3	Der Kondensator	54
4.3.1	Der Parallelplatten-Kondensator	54
4.3.1.1	Speicherung von Ladung.	55
4.3.2	Der Kugelkondensator	55
4.3.3	Feldstärke und Ladungsdichte	55
4.4	Aufgaben und Lösungen	56
5	Elektrostatische Energie	65
5.1	Einzelne Ladungen	65
5.2	Homogen verteilte Ladungen	65
5.3	Kondensator	66
5.4	Energie des elektrostatischen Feldes	67
5.5	Entladung eines Kondensators	67
5.6	Polarisation	68
5.6.1	Polarisierbarkeit eines Gases	69
5.6.2	Elektronische Polarisation	70
5.6.3	Orientierungspolarisation	71
5.7	Aufgaben und Lösungen	72
6	Magnetostatik	77
6.1	Strom aus trockenen Zellen	77
6.2	Der elektrische Strom	78
6.2.1	Das Ohmsche Gesetz	78
6.3	Kontinuitätsgleichung	79
6.4	Das differentielle Ohmsche Gesetz	80
6.5	Energie und Leistung elektrischer Ströme	80
6.6	Leistungsanpassung	80
6.6.1	Spannungsquelle und Stromquelle	82
6.6.1.1	Spannungsquelle.	82
6.6.1.2	Stromquelle.	82
6.7	Magnetische Kraft auf einen Strom	83
6.8	Das magnetische Feld statischer Ströme	84
6.9	Das magnetische Feld einer Spule	87
6.9.1	Das Feld am Spulenende	88
6.9.2	Feldstärke und Flußdichte	88
6.9.3	Drehspulgalvanometer	89
6.10	Materie im Magnetfeld	90

6.10.1	Der Elektromagnet	94
6.11	Das Gesetz von Biot und Savart	96
6.12	Linearität und Superpositionsprinzip	98
6.13	Aufgaben und Lösungen	99
7	Elektronen im Hochvakuum und in Festkörpern	109
7.1	Lorentz-Kraft	109
7.2	Braunsche Röhre	110
7.3	Die spezifische Ladung e_0/m_e	110
7.4	Elektronenmikroskop	111
7.5	Halleffekt	113
7.6	Aufgaben und Lösungen	115
8	Induktionserscheinungen	119
8.1	Spannungserzeugung	119
8.1.1	Gesetze von Faraday und Lenz	119
8.1.2	Der Kollektor	121
8.1.3	Dynamo und Elektromotor	122
8.2	3. Maxwell-Gleichung	123
8.3	Gegenseitige Induktion	123
8.3.1	Gegeninduktivität	124
8.3.2	Selbstinduktivität	124
8.4	Stromkreis mit Induktivität	125
8.5	Energie im Magnetfeld	126
8.6	Transformator	127
8.7	Dynamoelektrisches Prinzip	128
8.7.1	Elektromotor	129
8.7.1.1	Hauptschlußmotor.	129
8.7.1.2	Nebenschlußmotor.	129
8.8	Gleichstrom vs. Wechselstrom	130
8.9	Betatron	130
8.10	Haushaltsgeräte	133
8.10.1	Klingel	133
8.10.2	Türöffner	133
8.10.3	Leuchtstoffröhre	134
8.10.4	Elektrodynamischer Lautsprecher	137
8.11	Aufgaben und Lösungen	137
	Literaturverzeichnis	143

1 Mathematik

1.1 Vektoranalysis

1.1.1 Gaußscher Satz

Für ein durch ein Rohr fließendes, inkompressibles Fluid gilt die Gl. (1.1)

$$V = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.1)$$

Was ist, wenn ein durch ein Rohr fließendes Medium nicht inkompressibel ist? Dazu betrachten wir einen Kubus, auf dessen $-x$ -Seite, also in der yz -Ebene, ein Medium hinein- und auf dessen $+x$ -Seite, wieder durch die yz -Ebene, hinausströme (Abb. 1.1). Der Fluß auf der $-x$ -Seite (Fläche 1) ist natürlich positiv, da ja nichts hinaus-, sondern im Gegenteil hineinströmt. Diese Seite stellt also eine *Quelle* dar. Der Fluß Φ ist also das Produkt der Stromdichte j_x und der durchströmten Fläche $\Delta x \Delta y$:

$$\Phi(-x) = j_1 \Delta y \Delta z. \quad (1.2)$$

entsprechend auf der $+x$ -Seite (Seite 2)

$$\Phi(+x) = -j_2 \Delta y \Delta z. \quad (1.3)$$

Lassen wir zu, daß sich die Flüsse geringfügig unterscheiden dürfen, dann ist also die Änderung mit einem linearen Ansatz

$$j_2 = j_1 + \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x, \quad (1.4)$$

womit der Fluß aus der Fläche 2

$$\Phi_2 = \left(j_1 + \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \quad (1.5)$$

und damit deren Differenz oder Ergiebigkeit

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.6.1)$$

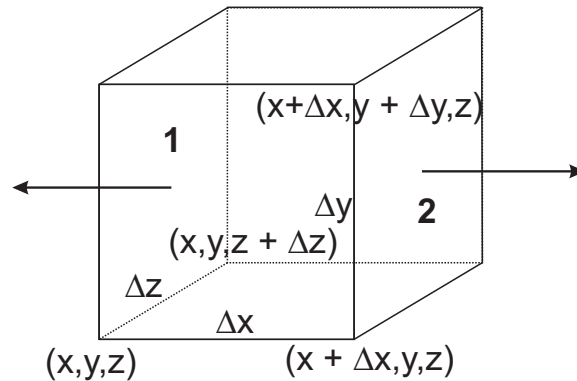


Abb. 1.1. Zum GAUSSschen Theorem. Eine kompressible Flüssigkeit strömt in x -Richtung von negativen x zu positiven x durch einen Würfel. Wie groß ist die *Ergiebigkeit* des Quellengebiets (wieviel Flüssigkeit kommt also hier dazu)?

wird,¹ entsprechend in die zwei anderen Raumrichtungen

$$\frac{\partial j_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (1.6.2)$$

$$\frac{\partial j_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z; \quad (1.6.3)$$

insgesamt also mit der Gl. (1.1)

$$\cdot \quad dA = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (1.7.1)$$

was aber gleich der Divergenz des Vektors ist. Außerdem ist $\Delta x \Delta y \Delta z$ gleich dem Volumen V des Kubus. Folglich gilt der GAUSSsche Satz

$$\cdot \quad dA = (\nabla \cdot \mathbf{j}) (dV = d^3x) = (\nabla \cdot \mathbf{j}) \Delta V. \quad (1.7.2)$$

1.1.2 Stokesscher Satz

Beispiel 1.1. Eine quadratische Holzscheibe treibe in einer laminaren Strömung (x -Richtung). Dann entsteht an der Stirnseite ein Strömungswiderstand mit Überdruck und an der Heckseite ein Unterdruck, und beide führen dazu, daß die Holzscheibe sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = dv/dx$ dreht. Zeigt die Strömung nur in eine Richtung, dann ist die zur Strömungsrichtung transversale Geschwindigkeitsänderung, die die auf dem Flächenelement senkrecht stehende Winkelgeschwindigkeit ω bestimmt, zusammengesetzt aus zwei Komponenten, einer, mit der die Zunahme der Geschwindigkeit senkrecht zur Flußrichtung, also in y -Richtung, und einer, mit der die Abnahme

¹Dabei wird die Ableitung in der Mitte der Fläche 1 gebildet, also bei $-x, y + 1/2 \Delta y, z + 1/2 \Delta z$.

der Geschwindigkeit in Flußrichtung, also in x -Richtung, beschrieben wird. Um das quantitativ zu machen, wollen wir das Linienintegral eines Umlaufs bestimmen, wir bilden also die Zirkulation (Abb. 1.2):

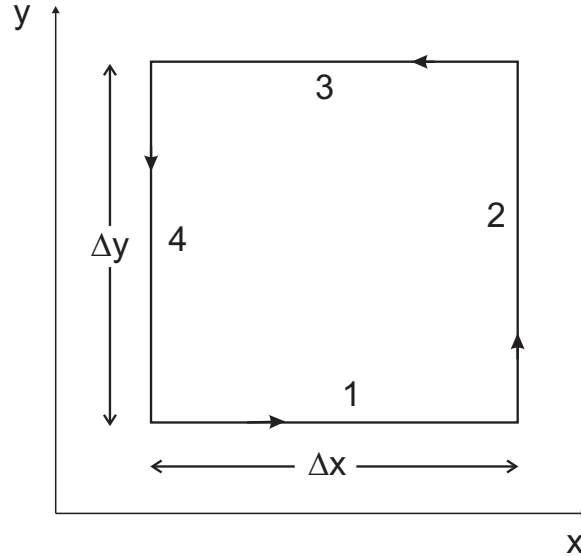


Abb. 1.2. Berechnung des Linienintegrals für einen vollständigen Umlauf.

$$\cdot d = \omega_x(1)\Delta x + \omega_y(2)\Delta y - \omega_x(3)\Delta x - \omega_y(4)\Delta y. \quad (1.8)$$

Als nächstes fassen wir die jeweils gegenläufigen Stücke 1 und 3 sowie 2 und 4 zusammen und bilden die Differenz:

$$(\omega_x(1) - \omega_x(3))\Delta x \wedge (\omega_y(2) - \omega_y(4))\Delta y, \quad (1.9)$$

die, wenn wir eine Änderung von ω zulassen, nicht Null sind, sondern bei einer linearen Änderung (Zunahme in y -Richtung)

$$\omega_x(3) = \omega_x(1) + \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \Delta y \quad (1.10.1)$$

und (Abnahme in x -Richtung)

$$\omega_y(4) = \omega_y(2) - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \Delta x \quad (1.10.2)$$

ergeben. Für die Differenzen in Gln. (1.10) können wir also schreiben:

$$(\omega_x(1) - \omega_x(3)) \Delta x = -\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (1.11.1)$$

und

$$(\omega_y(2) - \omega_y(4)) \Delta y = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \Delta x \Delta y, \quad (1.11.2)$$

womit sich für die Zirkulation um das vollständige Quadrat

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (1.12)$$

ergibt. Die beiden Summanden in der Klammer sind Glieder des Vektorprodukts zwischen ∇ und ω , das senkrecht auf den Komponenten von ω in x - und y -Richtung steht, also in z -Richtung, und $\Delta x \Delta y$ ist die Fläche des Quadrats.

$$(\nabla \times \omega)_z \Delta A = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \Delta x \Delta y, \quad (1.13)$$

deren linke Seite daher als

$$(\nabla \times \omega) \cdot \mathbf{d} \Delta A \quad (1.14)$$

mit \mathbf{d} als Einheitsvektor, der senkrecht auf dem Flächenelement dA steht. In integraler Form sieht das Ergebnis dann so aus (Satz von STOKES):

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{d} \Delta A \quad (1.15)$$

In den Kapiteln 3 und 4 der Mechanik hatten wir eine konservative Kraft definiert und festgestellt, daß das Kraftfeld dann ein Potential hat, wenn

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (1.16)$$

Nach dem Satz von STOKES ist für jeden Vektor

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{d} \Delta A, \quad (1.17)$$

woraus sich entscheidende Tatsachen ableiten lassen:

- Eine konservative Kraft kann als Gradient einer skalaren Funktion, Potential genannt, dargestellt werden: $\mathbf{F} = -\nabla \Phi(r)$. Dabei bedeutet „konservativ“, daß die längs beliebiger Kurven geleistete Arbeit nur von Anfangs- und Endzustand, nicht dagegen von der Wahl des Weges abhängt.
- Ein Kraftfeld besitzt dann ein (skalares) Potential, wenn seine Rotation überall verschwindet:

Satz 1.1 Wenn $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, dann gibt es immer ein skalares Feld Φ , so daß gilt $\mathbf{F} = \nabla \Phi$.

Algebraisch ergibt sich das einfach daraus, daß $\nabla \times (\nabla \Phi) = (\nabla \times \nabla) \Phi = 0$, da der eingeschlossene Winkel 0° ist.

- Ein Wirbelfeld ist frei von (skalaren) Potentialen:

Satz 1.2 Wenn $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, dann gibt es immer ein vektorielles Wirbelfeld $\mathbf{\Phi}$, so daß gilt $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{\Phi}$.

Auch hier ergibt sich algebraisch, daß $\nabla \times \mathbf{\Phi}$ sowohl senkrecht auf ∇ wie senkrecht auf $\mathbf{\Phi}$ steht, so daß das Skalarprodukt dieses Vektors mit ∇ verschwindet.

- Unter dem *Fluß* verstehen wir das Integral der Flußdichte über die Fläche. Dabei steht die Flußdichte senkrecht auf dem Flächenelement:

$$\text{Fluß} = \text{mittlere Normalkomponente} \cdot \text{Flächenelement.} \quad (1.18)$$

- Unter der Zirkulation verstehen wir das Linienintegral der Tangentialkomponente eines Vektors:

$$\text{Zirkulation} = \text{mittlere Tangentialkomponente} \cdot \text{Umlauf.} \quad (1.19)$$

Dabei ist die umlaufene Linie frei wählbar.

1.1.3 Fehlerrechnung

1.1.3.1 Normalverteilung. Man unterscheidet zwischen systematischen und zufälligen oder statistischen Fehlern. Während jene Fehler nur schwer einer mathematischen Analyse zugänglich sind (Eichfehler, eine Berücksichtigung eines Fehlers ist wegen mangelhafter Meßmethodik unmöglich, z. B. bei JOULEscher Erwärmung eines Drahts während einer Widerstandsmessung ...), gibt es für statistische Fehler zahlreiche Möglichkeiten ihrer Abschätzung und Berechnung.

Sind mehrere Fehlerquellen möglich, dann addieren sich die dadurch bedingten Fehler Δ_1 und Δ_2 nicht algebraisch, sondern nach dem Gesetz von PYTHAGORAS,² also geometrisch. Man kann auch sagen, wir bestimmen den Betrag eines Fehlervektors:

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2, \quad (1.20)$$

und da die Fehler unabhängig voneinander sind, ist die Wahrscheinlichkeit $p(\Delta)$ gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$p(\Delta) = p(\Delta_1) \cdot p(\Delta_2). \quad (1.21)$$

Da die Aufteilung in die Teilfunktionen $p(\Delta_1)$ und $p(\Delta_2)$ willkürlich ist, da sie vom gewählten Meßverfahren abhängt, muß die Gesamtfunktion p ebenso von Δ abhängen. Dies ist nur mit der Exponential-Funktion möglich:

²Der Beweis läuft über die Dichtefunktionen der GAUSS-Verteilung.

$$p(\Delta) = b \exp -a\Delta^2. \quad (1.22)$$

Durch das Minus-Zeichen werden große Abweichungen seltener. Die Koeffizienten a und b werden in der Fehleranalyse bestimmt. Im Ergebnis erhält man die GAUSSsche Glockenkurve (Abb. 1.3).

Das arithmetische Mittel der Meßwerte ist

$$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad (1.23)$$

und die absolute Abweichung eines jeden Meßwertes vom Mittelwert heißt *Residuum*:

$$\delta = |y_i - \langle y \rangle|, \quad (1.24)$$

deren Werte (mit Vorzeichen) normalverteilt sein sollen, so daß deren Summe Null ergibt:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - \langle y \rangle = 0. \quad (1.25)$$

Die Residuen folgen dann einer GAUSS-Verteilung, und die Varianz σ_i^2 ist ein Maß für die Streuung der Meßwerte der Stichprobe y_i um den Mittelwert $\langle y \rangle$:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}{N - 1}. \quad (1.26)$$

Die Wurzel aus dieser Größe ist die Standardabweichung:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}}{N - 1}, \quad (1.27)$$

wenn N die Anzahl der Meßpunkte ist. R ist der *Korrelationskoeffizient*, und der p -Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß R Null ist. — Im Nenner der Gln. (1.26) u. (1.27) tritt die Zahl der Meßwerte, vermindert um Eins, auf. Im Grenzfall einer einzigen Messung ergibt sich dann, daß der Fehler unbestimmt ist.

Damit ergibt sich die Formel der GAUSSschen Glockenkurve zu

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}, \quad (1.28)$$

- das Maximum liegt bei $x = \langle x \rangle$,
- die Wendepunkte bei $x = \langle x \rangle \pm \sigma$.
- Zwischen $x = \langle x \rangle - \sigma$ und $x = \langle x \rangle + \sigma$ liegen etwa 68 % aller Meßwerte,
- zwischen $x = \langle x \rangle - 2\sigma$ und $x = \langle x \rangle + 2\sigma$ liegen 95,5 % und
- zwischen $x = \langle x \rangle - 3\sigma$ und $x = \langle x \rangle + 3\sigma$ 99,7 % aller Meßwerte.

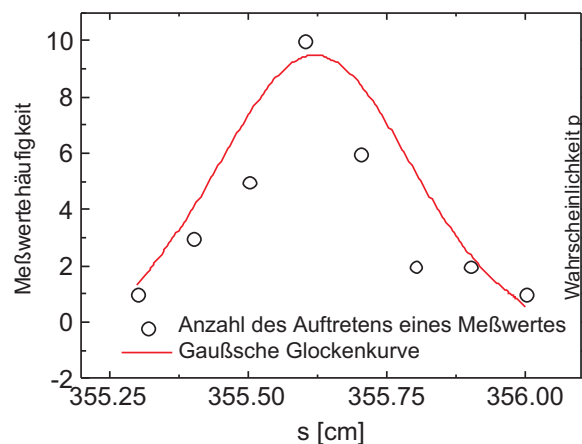


Abb. 1.3. Häufigkeitsverteilung einer Längenmessung. Die Häufigkeit der Meßergebnisse ist gegen ihren gemessenen Wert aufgetragen. Auf der rechten Ordinate ist die Glockenkurve (zu dividieren durch 25) aufgetragen.

- 50 %, also die Hälfte, aller Meßwerte, liegen zwischen $x = \langle x \rangle - 0,674\sigma$ und $x = \langle x \rangle + 0,674\sigma$.
- Zwischen σ und der Halbwertsbreite $FWHM$ besteht der Zusammenhang

$$FWHM = 2\sqrt{2 \ln 2}\sigma. \tag{1.29}$$

Die Gl. (1.28) ist auf Eins normiert. Dabei bedeuten ein kleines σ eine hohe, schlanke Kurve, ein großes σ dagegen eine breite, niedrige Kurve (Abb. 1.4).

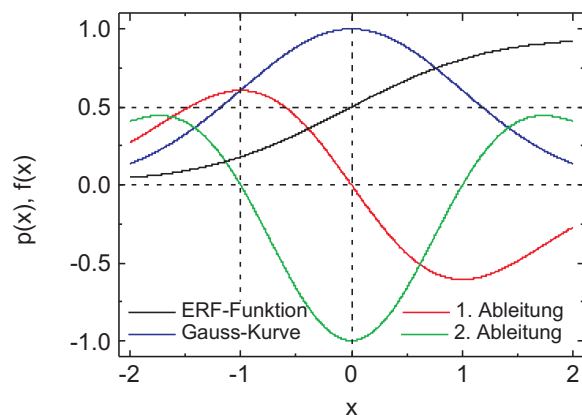


Abb. 1.4. Darstellung der GAUSSschen Glockenkurve, ihrer zwei Ableitungen und ihres Integrals, der Error-Funktion. Das Integral ist auf Eins normiert und beträgt jeweils 0,5 links und rechts vom Mittelwert μ , der im vorliegenden Fall Null ist. Die Standardabweichung beträgt Eins; dort sind die Wendestellen der Glockenkurve (s. Aufgabe 1.18).

1.1.3.2 Fehlerfortpflanzung. Für physikalische Sachverhalte ist die Messung abgeleiteter Größen erforderlich, zu deren Erfassung mehrere Teilgrößen mit ihren Fehlern zu bestimmen sind. Hierfür verwenden wir das Fehlerfortpflanzungsgesetz von GAUSS, dessen Grundidee die Entwicklung einer TAYLOR-Reihe ist. Der Funktionswert $Z(x + \Delta x)$ kann aus dem Funktionswert $Z(x)$ bei kleinen Δx über eine Reihenentwicklung bestimmt werden:

$$Z + \Delta Z = Z(x + \Delta x) = Z(x) + \frac{dZ(x)}{dx} \Delta x + \dots \Rightarrow \Delta Z = \frac{dZ(x)}{dx} \Delta x + \dots \quad (1.30)$$

entsprechend bei mehreren Variablen

$$Z + \Delta Z = Z(x + \Delta x, y + \Delta y) = Z(x) + \frac{\partial Z(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Z(y)}{\partial y} \Delta y + \dots \quad (1.31.1)$$

$$\Delta Z = \frac{\partial Z(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Z(y)}{\partial y} \Delta y = \sum_i \frac{\partial Z(x_i)}{\partial x_i} \Delta x_i. \quad (1.31.2)$$

Nach Gl. (1.20) addieren sich jedoch nicht die Fehler algebraisch, sondern geometrisch, also deren Quadrate:

$$(\Delta Z)^2 = \frac{\partial Z(x)}{\partial x}^2 (\Delta x)^2 + \frac{\partial Z(z)}{\partial z}^2 (\Delta z)^2 = \sum_i \frac{\partial Z(x_i)}{\partial x_i}^2 (\Delta x_i)^2. \quad (1.32)$$

Wenn $Z = Z(x, y, z)$ die zu berechnende Größe und die $\langle x \rangle \pm \Delta_x$ die einzeln gemessenen Größen, gilt

$$\sigma_Z = \sqrt{\frac{\partial Z}{\partial x}^2 (\Delta_x)^2 + \frac{\partial Z}{\partial y}^2 (\Delta_y)^2 + \frac{\partial Z}{\partial z}^2 (\Delta_z)^2} \quad (1.33)$$

Für einfachere Angaben (insbesondere die „obere“ Abschätzung) gibt man die algebraische Summe der Beträge der Standardabweichungen an; dies gilt insbesondere dann, wenn Z das Produkt der einzelnen Variablen x_i ist:

$$\sigma_Z = \frac{\partial Z}{\partial x} |\Delta_x| + \frac{\partial Z}{\partial y} |\Delta_y| + \frac{\partial Z}{\partial z} |\Delta_z|. \quad (1.34)$$

1.1.3.3 Lineare Regression. Wir gehen von einem gegebenen Datensatz aus (x_i, y_i) mit den x den unabhängigen und y den abhängigen Variablen, von denen wir annehmen, daß zwischen diesen ein linearer Zusammenhang besteht:

$$y_i = mx_i + b. \quad (1.35)$$

Dabei werden die Parameter m und b nach der *Methode der kleinsten Quadrate* bestimmt, indem das Minimum der Summe der quadratischen Abweichungen des

Meßwertes y_i vom nach der Gl. (1.32) berechneten Wert, dem sog. *Residuum*, gesucht wird. Man faßt also die Konstanten m und b als Variablen auf und sucht das Minimum der Gleichung

$$F = \sum_{x=1}^n (y_x - b - mx)^2, \quad (1.36)$$

was auf die Bestimmung der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial m} \Big|_{b=\text{const}} \wedge \frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{m=\text{const}} \quad (1.37)$$

herausläuft, die für ein Extremum beide gleichzeitig verschwinden müssen.

$$m = \frac{n \sum xy_x - \sum x \sum y_x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{12 \sum xy_x - 6(n+1) \sum y_x}{n(n^2 - 1)}, \quad (1.38.1)$$

$$b = \frac{\sum x^2 \sum y_x - \sum x \sum xy_x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{2(2n+1) \sum y_x - 6 \sum xy_x}{n(n-1)}. \quad (1.38.2)$$

Für die Standardabweichung jeder Einzelmessung gilt (nur die y sind fehlerbehaftet!):

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{x=1}^n [y_x - (y(x))]^2}{n-2}}, \quad (1.39)$$

da eine Gerade immer durch 2 Punkte bestimmt wird. Die Standardabweichung der Bestimmungsparameter der Geradengleichung ist noch:

$$\sigma_m = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}; \quad (1.40.1)$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{y^2}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}. \quad (1.40.2)$$

Die Summationen laufen dabei von $i = 1$ bis n .

Die Lösung ist mit den Programmen EXCEL oder ORIGIN spielend zu erreichen.

1.2 Aufgaben und Lösungen

1.2.1 Gradient

Aufgabe 1.1 Bestimmen Sie den Gradienten von r , den Betrag von ∇r !

Lösung.

$$\nabla r = \nabla \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\cdot}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\cdot}^2} \cdot 2 = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}. \quad (1)$$

Aufgabe 1.2 Bestimmen Sie den Gradienten von $1/r$!

Lösung. r ist der Betrag von \vec{r} , also komponentenweise

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1)$$

x -Komponente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^3}, \quad (2)$$

zyklisch, insgesamt also

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (3)$$

Aufgabe 1.3 Gegeben ist das skalare Feld

$$\phi = y^2 z^2 + z^3 x^3 + x^4 y^4. \quad (1)$$

Bestimmen Sie das zugehörige Gradientenfeld, speziell an den Stellen $(0, 1, -1)$ und $(1, -2, -3)$!

Lösung.

$$(3x^2 z^3 + 4x^3 y^4, 2yz^2 + 4x^4 y^3, 2y^2 z + 3x^3 z^2). \quad (2)$$

$$(0, 2, -2) \wedge (-17, -68, 3). \quad (3)$$

Aufgabe 1.4 Wie lautet das Gradientenfeld von

$$\phi = x \sin(yz)? \quad (1)$$

Lösung.

$$\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz)). \quad (2)$$

Aufgabe 1.5 Bestimmen Sie die Normalenvektoren zu einer im Raum gegebenen Äquipotentialfläche $\Phi(x, y, z) = \text{const}$!

Lösung. Die Änderung von Φ beim Fortschreiten um $\Delta \vec{r}$ ist

$$\Delta \Phi = \nabla \Phi \cdot \Delta \vec{r}, \quad (1)$$

also das skalare Produkt aus dem Gradienten und der Änderung des Ortes, wobei der Gradient des Potentials Φ

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (2)$$

ist. Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Zusätzlich verschwindet das Skalarprodukt aber auch, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Wir sehen vom trivialen Fall $\Delta = 0$ ab. Die Änderung von Φ ist

$$\Delta\Phi = \Delta x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (3)$$

Bewegen wir uns entlang einer Linie konstanten Potentials, etwa $\Phi(r) = A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$, dann ändert sich Φ nicht, ist also Null. Damit verschwindet auch das Skalarprodukt $\nabla\Phi \cdot \Delta$. Damit das immer gilt, muß der Gradient von Φ senkrecht zu den Äquipotentialflächen stehen.

Verändern wir jetzt das Potential um $\Delta\Phi$ entlang eines Weges Δ , so ist nach Gl. (1) die Änderung des Potentials

$$\Delta\Phi = |\nabla\Phi| |\Delta| \cos\varphi, \quad (4)$$

liegt also zwischen den Beträgen der beiden Faktoren, gewichtet um den $\cos\varphi$. Die Änderung von Φ wird maximal, wenn der Gradient des Potentials und die Ortsänderung parallel zueinander stehen, oder anders herum: der Gradient zeigt in die Richtung der stärksten Potentialänderung. Damit wird

$$\hat{\Delta} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}. \quad (5)$$

Aufgabe 1.6 Bestimmen Sie den Gradienten des Potentials

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz, \quad (1)$$

wobei

$$a = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\nabla\phi = a \hat{x} + b \hat{y} + c \hat{z}. \quad (3)$$

Lösung. Die Gl. (1) lautet in Komponenten

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz \quad (4)$$

$$\nabla\phi = \nabla(ax + by + cz) = a \hat{x} + b \hat{y} + c \hat{z}. \quad (5)$$

1.2.2 Divergenz

Aufgabe 1.7 Gegeben sei

$$= + + = a + b + c .$$

Bestimmen Sie die Divergenz!

Lösung.

$$\nabla \cdot = a \frac{\partial}{\partial x} \cdot + b \frac{\partial}{\partial y} \cdot + c \frac{\partial}{\partial z} \cdot = a + b + c : \quad (1)$$

Dieses Feld hat überall die gleiche, konstante Quellenstärke.

Aufgabe 1.8 Sind die beiden folgenden Strömungsfelder einer inkompressiblen Flüssigkeit quellenfrei, oder unter welchen Bedingungen werden sie quellenfrei?

$$= a ; \quad (1)$$

$$v_x = axy, \quad (2.1)$$

$$v_y = byz, \quad (2.2)$$

$$v_z = cyz + dz^2. \quad (2.3)$$

Lösung. Der Vektor hat die Komponenten

$$v_x = ax, v_y = ay, v_z = az. \quad (3)$$

Seine Divergenz ist

$$\nabla \cdot = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 3a : \quad (4)$$

Das Strömungsfeld ist räumlich konstant. Es ist genau dann quellenfrei, wenn es ganz verschwindet.

Die Divergenz des zweiten Strömungsfeldes ergibt sich zu

$$\nabla \cdot = (a + c)y + (2d + b)z, \quad (5)$$

es ist quellenfrei, wenn die beiden Bedingungen

$$a = -c \wedge b = -2d \quad (6)$$

erfüllt sind.

Aufgabe 1.9 Gegeben sind die skalaren Felder

- $\varphi = \sin(k \cdot \mathbf{r})$ und
- $\psi = \exp(-\alpha r^2)$,

mit k und α Konstanten. Bestimmen Sie zunächst deren Gradientenfelder und anschließend deren Quellen!

Lösung.

$$\nabla\varphi = k \cos(k \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}, \quad (1)$$

$$\nabla\psi = -2\alpha \exp(-\alpha r^2) \mathbf{r}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\sin(k \cdot \mathbf{r}) k^2, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \nabla\psi = (4\alpha^2 r^2 - 6\alpha) \exp(-\alpha r^2). \quad (4)$$

1.2.3 Rotation

Aufgabe 1.10 Was ergibt $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$?

Lösung. Der Produktvektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ steht senkrecht auf seinen beiden Vektorfaktoren, hat also keinen Komponenten in Richtung von \mathbf{a} ! Daher ist sein Skalarprodukt mit \mathbf{a} Null.

Aufgabe 1.11 Was ergibt $\nabla \times (\nabla\phi)$ mit ϕ einem skalaren Feld (Komponenten)?

Lösung. Dieses Problem löst man am besten komponentenweise, z. B. für die z -Komponente:

$$[\nabla \times (\nabla\phi)]_z = \nabla_x(\nabla\phi)_y - \nabla_y(\nabla\phi)_x \quad (1)$$

$$[\nabla \times (\nabla\phi)]_z = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

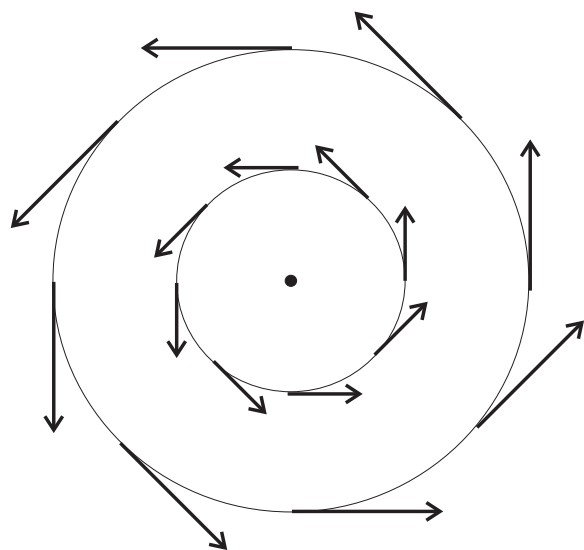


Abb. 1.5. Der Vektor \mathbf{B} stößt aus der Zeichenebene und zeigt auf den Beobachter. Wegen $\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}_\perp$ ist das gezeichnete Bild aus der Ebene heraus als Helix fortzusetzen.

Aufgabe 1.12 Zeichnen Sie das Wirbelfeld

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y)$$

und bestimmen Sie $\nabla \times \mathbf{B}$!

Lösung.

$$\nabla_x (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y)_z = \nabla_y (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y)_z - \nabla_z (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y)_y. \quad (1)$$

$$\nabla_x (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y)_z = \frac{\partial}{\partial y} (B_x y - B_y x) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z x - B_x z) = 2B_x, \quad (2)$$

da alle Ableitungen

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = 0, \text{ zyklisch.} \quad (3)$$

Also ist

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (4)$$

ein konstanter Vektor (Abb. 1.5).

Aufgabe 1.13 Bestimmen Sie den Vektor $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$!

Lösung. Der Produktvektor $\nabla \times \mathbf{A}$ steht senkrecht auf seinen beiden Vektorfaktoren, hat also keinen Komponenten in Richtung von ∇ ! Daher ist sein Skalarprodukt mit ∇ Null.

Aufgabe 1.14 Bestimmen Sie $\nabla \times$!

Lösung.

$$\nabla_z \times = \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot y - \frac{\partial}{\partial y} \cdot x \right], \text{ zyklisch.} \quad (1)$$

1.2.4 Fehleranalyse

Aufgabe 1.15 Die Stichprobe einer Längenmessung sieht wie folgt aus:

<i>Nummer</i>	<i>Meßwert</i> [cm]	<i>Nummer</i>	<i>Meßwert</i> [cm]
1	355,6	16	355,7
2	355,8	17	355,8
3	355,5	18	355,6
4	355,6	19	355,4
5	355,6	20	355,5
6	355,9	21	355,6
7	355,5	22	355,7
8	355,4	23	355,7
9	355,6	24	355,5
10	355,7	25	355,4
11	355,6	26	355,5
12	355,9	27	355,7
13	356,0	28	355,6
14	355,6	29	355,6
15	355,3	30	355,7

Bestimmen Sie den

- den Mittelwert der Stichprobe,
- die absolute Häufigkeit der Stichprobenwerte,
- die relative Häufigkeit der Stichprobenwerte,
- die Varianz,
- die Standardabweichung.
- Ist die Summe der Residuen Null?

Lösung.

- Der Mittelwert ist $l = 355,62$ cm.
- Die Summe der quadratischen Residuen ist $0,728$ cm².
- Damit wird die Varianz $2,51 \cdot 10^{-2}$ cm².
- Damit wird die Standardabweichung $0,158$ cm.
- Die Summe der Residuen ist exakt Null.

Aufgabe 1.16 Zeigen Sie durch Auswertung der folgenden Stichprobe, daß ein linearer Zusammenhang zwischen Baumhöhe und Stammdurchmesser besteht!

<i>Meßpunkt</i>	<i>Durchmesser</i> [cm]	<i>Höhe</i> [m]
1	10,6	8,6
2	14,0	11,5
3	18,1	12,4
4	23,2	15,6
5	25,0	15,1
6	26,4	17,7
7	30,5	18,9
8	32,5	18,6
9	36,6	21,3
10	40,1	24,3

- Bestimmen Sie die einzelnen Summen und Produkte, um eine lineare Regression nach GAUSS durchzuführen!
- Bestimmen Sie dann die Gleichung $y = mx + b$.
- Bestimmen Sie die Standardabweichung einer Einzelmessung!
- Bestimmen Sie daraus die Standardabweichung für die optimierten Geradenparameter!

Lösung.

Aus den Meßwerten ergibt sich für

- die Summe der Meßwerte: 10;
- $\sum_{x=1}^{10} x_i = 257$;
- $\sum_{y=1}^{10} y_i = 164,0$;
- $\sum_{x=1}^{10} x_i^2 = 7430,24$;

- $\sum_{x=1}^{10} x_i y_i = 4618,26$;
- $m = 0,4888$;
- $b = 3,837$;
- Residualsumme: $5,1522$;
- Standardabweichung: $\sigma = 0,8025$;
- $\sigma_m = 0,0279$;
- $\sigma_b = 0,7614$.

Aufgabe 1.17 Zeigen Sie mittels des GAUSSschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes, daß der mittlere Fehler des Mittelwertes einer Stichprobe, deren Messungen mit gleicher Präzision durchgeführt wurden, gleich dem mittleren Fehler einer Einzelmessung, geteilt durch die Wurzel der Anzahl der Messungen, ist!

Lösung. Die Standardabweichung σ einer aus mehreren funktionalen Abhängigkeiten, z. B. von x , y , und z , bestehenden Größe ist gegeben durch

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2}. \quad (1)$$

Im Falle der Mittelwertbildung

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2)$$

sind die Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \quad (3)$$

alle gleich; daher wird die Varianz

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2), \quad (3)$$

die nach Voraussetzung alle gleich sind und damit ohne Index als σ geschrieben werden können, damit also

$$\sigma_{\langle x \rangle}^2 = n \frac{\sigma^2}{n^2} \Rightarrow \sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (4)$$

Aufgabe 1.18 Eine normalverteilte Gesamtheit von Meßpunkten hat den Mittelwert 20 m und die Varianz 25 m². Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von 30 m!

Lösung. Wir gehen zur normierten GAUSSverteilung durch Wechsel der Veränderlichen

$$\lambda = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (1)$$

über (mit μ dem Mittelwert und σ der Standardabweichung oder Streuung). λ ist 2, woraus sich ein Funktionswert $\varphi(\lambda)$ von 0,054 ergibt. Division durch die Standardabweichung ergibt eine Wahrscheinlichkeit von

$$p(x) = \frac{\varphi(\lambda)}{\sigma} = 0,0108 = 1,08 \%. \quad (2)$$

Aufgabe 1.19 Zeigen Sie an Hand der GAUSSschen Glockenkurve

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2} , \quad (1)$$

daß das Maximum bei $\mu = \langle x \rangle$ und die Wendepunkte bei $\mu \pm \sigma$ liegen!

Lösung. Die Abb. 1.6 zeigt den Zusammenhang zwischen der GAUSSschen Glockenkurve, der Error-Funktion und den Ableitungen.

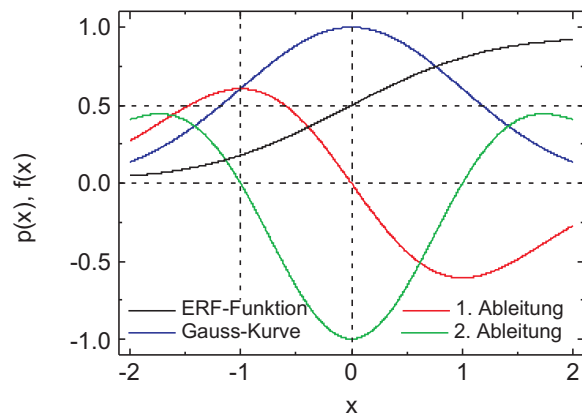


Abb. 1.6. Darstellung der GAUSSschen Glockenkurve, ihrer zwei Ableitungen und ihres Integrals, der Error-Funktion. Das Integral ist auf Eins normiert und beträgt jeweils 0,5 links und rechts vom Mittelwert μ , der im vorliegenden Fall Null ist. Die Standardabweichung beträgt Eins; dort sind die Wendestellen der Glockenkurve (s. Aufgabe 1.18).

Aufgabe 1.20 Eine GAUSSverteilung ist durch den Mittelwert $\mu = 20$ m und die Varianz $\sigma^2 = 25$ m² definiert. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Zufallsgröße zwischen den Grenzen 15 und 25 m sowie jenseits von 30 m an!

Lösung. Wir bestimmen λ zu -1 und 1 m und erhalten aus der Integraltabelle den Wert 0,3413. Durch Addition ergibt sich der Wert von 0,6826. Mit 68 % Wahrscheinlichkeit liegen also die Werte in dem Intervall, das um den Mittelwert μ um die Standardabweichung σ streut. — Für den zweiten Fall ergibt sich ein λ von 2 m, woraus ein Integralwert von 0,4772 folgt. Durch Differenzbildung ergibt sich

$$p(x) = 0,5 - 0,4772 = 2,28 \%. \quad (1)$$

Von einer normal verteilten Gesamtheit von 1000 Bäumen sind also 23 höher als 30 m.

Aufgabe 1.21 Am radioaktiven Zerfall lassen sich modellhaft einige statistische Gesetzmäßigkeiten studieren. Angenommen, wir haben uns zur Zeit $t = 0$ eine gut gereinigte Probe z. B. von Radium hergestellt, dann finden wir deren zeitliche Abnahme nach der Gleichung

$$dn = -\lambda n dt, \quad (1)$$

woraus sich das Zerfallsgesetz

$$n = n_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

mit n der Konzentration, n_0 der Anfangskonzentration und λ der Zerfallskonstanten mit der Dimension [1/sec] ergibt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ra-Kern im Zeitintervall dt zerfällt, gegeben durch

$$p(t) dt = \alpha e^{-\lambda t} dt, \quad (3)$$

wobei α ein Normierungsfaktor und $P(t)$ die Dichtefunktion für den Zerfallsprozeß ist, die sich natürlich wesentlich von der GAUSSschen Normalverteilung unterscheidet.

- Bestimmen Sie α und
- geben Sie eine statistische Erklärung für den Kehrwert von λ , die in der Literatur meist mit τ bezeichnet wird.
- Wie hängt die Halbwertszeit, in der jeweils die Hälfte der zu Beginn des Beobachtungszeitraums vorhandenen Atome zerfallen ist, mit τ zusammen?

Lösung.

$$\int_0^{\infty} \alpha p(t) dt = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} p(t) dt = \frac{1}{\alpha}. \quad (4)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty}. \quad (5)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \alpha = k \wedge \frac{1}{\alpha} = \tau. \quad (6)$$

Wenn $p(t)$ die Dichtefunktion ist, dann muß der zeitliche Mittelwert, also die mittlere Lebensdauer der Atome μ , gleich

$$\mu = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} t e^{-t/\tau} dt \quad (7)$$

sein. Partielle Integration liefert

$$\mu = \frac{1}{\tau} \left(-t\tau e^{-t/\tau} + \tau \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt \right), \quad (8)$$

was mit der L'HOSPITALSchen Regel schließlich die *mittlere Lebensdauer*

$$\mu = \tau \quad (9)$$

liefert. Die Halbwertszeit ist nach (2) gegeben durch

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda t = -\frac{t}{\tau}, \quad (10)$$

so daß die so bezeichnete Zeit $t = T_{1/2}$

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,693 \tau \quad (11)$$

wird.

Aufgabe 1.22 Rechteckverteilungen spielen im Labor bei Ablesevorgängen von Digitalanzeigen eine bedeutende Rolle, und zwar ist die Standardabweichung nach DIN gegeben durch $\sigma = \text{Fehler der letzten Stelle}/\sqrt{12}$. Bestimmen Sie für eine Verteilung in den Grenzen zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$, die der Gl.

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

mit der Nebenbedingung

$$f(\alpha \leq x \leq \beta) \neq 0 \quad (2)$$

genügt, den Mittelwert μ und die Standardabweichung $s = \sqrt{\sigma^2}$ und zeigen Sie, daß auch für diese Verteilung die Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ erfüllt ist!

Lösung.

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta - \alpha} x^2 \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{3(\beta - \alpha)} (x - \mu)^3 \Big|_{\alpha}^{\beta}, \quad (4)$$

was sich nach einiger Algebra zu

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2 \quad (5)$$

auföst, womit s zu

$$s = \sqrt{\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{12}}(\beta - \alpha) \quad (6)$$

wird. — Die Normierungsbedingung ergibt

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1. \quad (7)$$

2 Elektro-Magnetismus

2.1 Die elektrische Kraft

Neben der Gravitation gibt es im Konzert der Wechselwirkungskräfte eine Kraft, die die gleiche Reichweitenabhängigkeit aufweist, aber viel stärker ist. Außerdem gibt es — im Gegensatz zur Gravitation — zwei „Sorten“ von Materie, die wir positiv und negativ nennen, und die sich gegenseitig anziehen bzw. gleichsinnig abstoßen.

Dies wurde zuerst von THALES, der von 640? – 546 v. Chr. in Milet lebte, beim Reiben von Bernstein, auf griechisch „elektron“ genannt, mit anderen Materialien beobachtet. Insbesondere leichte Gegenstände wie Federn oder Blätter erwiesen sich wegen starker Beeinflussbarkeit als gute Indikatoren. Im Laufe der Jahrhunderte wurden auch andere Materialien gefunden, die den gleichen Effekt zeigten (dazu zählten viele Edelsteine), und etwa um 1600 prägte für dieses Phänomen der englische Arzt und Physiker WILLIAM GILBERT nach etwa dreißig Jahren der Auseinandersetzung mit diesem Thema den Namen *Elektrizität*. Die Art und Weise der Erzeugung ließ an eine Flüssigkeit denken, die von einem Stoff zu einem anderen floß, und die allerdings sehr leicht sein mußte. Jedenfalls kam die Beschäftigung mit dieser Elektrizität solange nicht über das Niveau von Zaubertricks heraus, wie es nicht gelang, signifikante Mengen dieses Flusses zu konzentrieren. Das gelang in den 1660iger Jahren zuerst OTTO VON GUERICKE, der schädelgroße Kugeln aus Schwefel auf bisher unerlebte Werte aufladen und sowohl eine abstoßende wie eine anziehende Wechselwirkung feststellen konnte. Es dauerte aber bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, bis diese Kraft quantifiziert wurde. Es stellte sich heraus, daß diese proportional dem Produkt der Ladungen Q und umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes r zwischen ihnen ist (COULOMBSches Gesetz)

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

Und es dauerte nochmals ein Jahrhundert, in dem die moderne Atomtheorie von DALTON und AVOGADRO entstand, daß man eine Ahnung von der Winzigkeit der Atome und der daraus folgenden ungeheuer großen Zahl bekam, die notwendig ist, um Materieansammlungen überhaupt wahrnehmen zu können, und wir sehen das heute in unserem Maßsystem (SI = MKSA) so:

Beispiel 2.1 Zur qualitativen Abschätzung dieser Kraft stellen wir uns vor, die zwei Sorten Mensch hätten jeweils einen Überschuß von 1 % eines Ladungstypus. Wie groß wäre die Kraft der Anziehung bzw. Abstoßung bei einer Masse von jeweils 70 kg und einem Abstand von einem Meter? Der Überschuß ist $0,7 \text{ kg} = 700 \text{ g}$. Ein Elektron wiegt $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, also haben wir $7,7 \cdot 10^{29}$ Ladungen, deren jede die Elementarladung $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Coul}$ trägt. Bei einem Abstand von 1 m erhalten wir nach dem COULOMBSchen Gesetz eine Kraft von

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} [\text{N}] = 9 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{58} \cdot 2,56 \cdot 10^{-38} \text{ N} = 1,4 \cdot 10^{32} \text{ N}. \quad (2.2)$$

Vergleichen wir das mit der Gewichtskraft unserer Erde in ihrem eigenen Gravitationsfeld! Bei einer mittleren Dichte von $5,52 \text{ g/cm}^3$, einem Durchmesser von $6\,380 \text{ km}$ folgt eine Masse von $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ oder eine Gewichtskraft von $6 \cdot 10^{25} \text{ N}$, also eine um 7 Größenordnungen kleinere Kraft!

Es ist also offensichtlich, daß alle elektrischen Effekte entweder durch winzige Ungleichgewichte an Ladungen entstehen oder auch dadurch, daß selbst bei perfektem Ladungsausgleich eine ungleichmäßige Anordnung von Ladungen vorliegt. Die Kräfte, die Atome und Moleküle zusammenhalten, werden genau durch derartige Effekte verursacht.

Die größenordnungsmäßigen Unterschiede in den Kräften werden algebraisch mittels der Konstanten berücksichtigt, die im Nenner steht. Entweder werden sie auf 1 gesetzt, dann ist es möglich, die Kraft zwischen zwei Massen oder zwei Ladungen zur Definition der Masse bzw. Ladung zu benutzen, oder sie erhält einen bestimmten Wert zugewiesen, um zwischen den beiden Größen auf den beiden Seiten der Gleichung zu vermitteln. So wird im Gravitationsgesetz die Konstante γ , in der Elektrostatik im SI-System die Feldkonstante ϵ_0 definiert (s. Kap. 3). Die Ladung wird damit zu einer Grundgröße, und das MKS-System wird zum MKSA-System.¹

Beispiel 2.2 Warum sind dann Atome eigentlich stabil? Man sollte doch annehmen, daß auf Grund der elektrostatischen Anziehung zwischen (positiv geladenem) Kern und (negativ geladenen) Elektron(en) die Lebenszeit eines derartigen Gebildes in der Gegend von Picosekunden liegen sollte. Atome sind deshalb stabil, weil es Kräfte gibt, die noch stärker als elektrische Kräfte sind. Versuchen wir also, ein Elektron auf Abstände zum Kern zu bringen, die kleiner als der durch die Elektrostatik bedingte Abstand sind, erhöht sich durch quantenmechanische Effekte (HEISENBERGSche Unschärferelation) der Impuls und damit die kinetische Energie des oder der Elektronen mehr, als dem Energiegewinn durch Ladungsannäherung entsprechen würde.

¹Zur Lächerlichkeit des Ansatzes, eine Basisgröße bereits mit dem Präfix „Kilo“ ausstatten zu müssen, s. z. B. [1].

2.2 Magnetismus

Während die Natur der elektrischen Ladung bipolar und separierbar in \oplus und \ominus ist, verhält sich die magnetische Kraft, die historisch als erste Erscheinungsform entdeckt wurde und ihren Namen von der Stadt Magnesia in Kleinasien hat, nur bei der Bipolarität ähnlich. Wichtig aber ist, daß die magnetischen Steine, die dort gefunden wurden, klar als Ursache der Kraft erkannt wurden.² Es ist möglich, Stabmagnete so zu orientieren, daß ihre Pole sich abstoßen, oder anders herum aufbauen, so daß sie sich anziehen. Dagegen gelingt bei physischer Aufspaltung des Magneten keine Trennung der Pole. Man spricht bei den beiden Polen wie bei der Erde von Nord- und Südpol. Zwar ist die Erde ziemlich kugelig, aber dennoch ein gutes Beispiel für einen sog. *Stabmagneten*, der ein inhomogenes Magnetfeld aufweist, das z. B. mit Eisenfeilspänen sichtbar gemacht werden kann (s. Abb. 2.1). Man sieht, daß die Feldlinien gekrümmt sind, und daß deren Dichte nicht gleich ist.

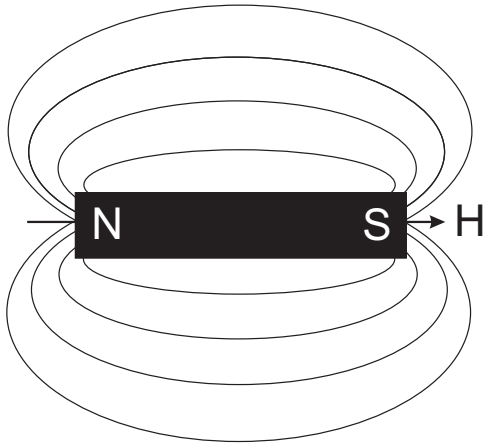


Abb. 2.1. Aus dem Nordpol eines Stabmagneten quillt ein inhomogenes Magnetfeld, das am Südpol endet. Die Kraft zwischen den beiden (punktförmig gedachten) Polen ist umgekehrt proportional ihrem Abstandsquadrat.

Im Entfernungsgesetz (2.3) erscheint das — wie γ im Gravitationsgesetz, wie ϵ_0 im elektrischen Gesetz — im Nenner. Hier aber handelt es sich um zwei Monopole der Polstärke P (Nordpol und Südpol), die um die Entfernung r getrennt sind, aber dennoch nicht isoliert werden können — der ideale Demonstrationsfall ist ein Stabmagnet:

$$F = \frac{P_1 P_2}{r^2} \frac{1}{\mu_0} \quad .^3 \quad (2.3)$$

Dies ist bei einem *Hufeisenmagnet* anders, wo die magnetischen Feldstärke zwischen den beiden Polschuhen gleich ist, und die Feldlinien parallel verlaufen. In diesem Bereich hängt das Feld nicht vom Ort ab, es ist gleichgerichtet und gleich

²Das ist bei der Gravitation erst durch NEWTON geschehen, weil jeder Mensch die Folgen der Gravitation spürt und bis NEWTON keiner die notwendigen Schlußfolgerungen zog, weder KOPERNIKUS noch KEPLER noch GALILEI.

³Auch hier gilt wieder, daß μ_0 entweder auf 1 oder auf einen bestimmten Wert gesetzt werden kann. Im SI-System wird μ_0 auf einen bestimmten Wert gesetzt (s. Kap. 6).

groß. Wir sagen: $\vec{B} = \text{const} \wedge d\vec{B} = 0$. Nur in der Nähe der Pole wird das Feld leicht inhomogen — wie überall außen (Abb. 2.2).

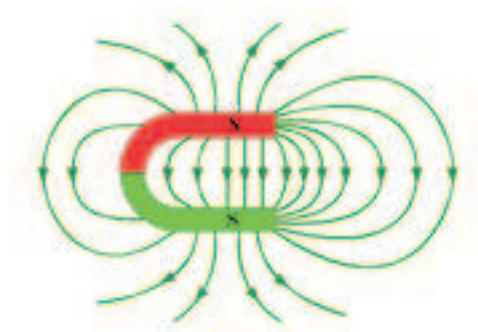


Abb. 2.2. Homogenes Magnetfeld zwischen den Polschuhen eines Hufeisenmagneten, eines um 180° gebogenen Stabmagneten
© www.onlinezyklopaedie.de

2.3 Superposition und Magnetismus

Wie wir bereits bei der Kinematik von Punktmassen gelernt haben, überlagern sich mechanische Bewegungen und Kräfte ungestört. Dies gilt auch für elektrische Kräfte, die Ladungen aufeinander ausüben, und zwar nicht nur Ladungshaufen, sondern insbesondere beliebig verteilte Ladungen, deren Kräfte aufeinander jeweils separat berechnet und dann nach den Gesetzen der Vektoralgebra aufsummiert werden können. Da Ladungen im Gegensatz zu Massen verschiebbar sind, muß bei räumlich ausgedehnten Ladungen, typischerweise geladenen hochsymmetrischen Systemen wie Kugeln, das COULOMBSche Gesetz sehr kritisch angewendet werden. Diese Ladungsverschiebungen werden *Influenz* genannt.

Bewegen sich die Ladungen, beobachten wir nicht nur *elektrische*, sondern zusätzlich auch *magnetische* Kräfte. Die auf die spezielle Ladung bezogene Kraft heißt elektrische Feldstärke ($E = F/Q$), und die auf die spezielle Ladung bezogene Kraft bei einer bestimmten Geschwindigkeit heißt magnetische Feldstärke, und die Vektorgleichung lautet:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.4)$$

und die Kräfte heißen COULOMB- bzw. LORENTZ-Kraft. Damit können wir bei gegebenen Feldgrößen die Trajektorien der Ladungen bestimmen. Wegen der ungestörten Überlagerung der Kräfte gilt z. B. für das elektrische Feld (gleiches gilt für das magnetische Feld), worunter wir eine physikalische Größe verstehen, die an verschiedenen Punkten im Raum unterschiedliche Werte annimmt:⁴

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i. \quad (2.5)$$

⁴Meist ist damit der Ortsraum gemeint, der allgemeine Feldbegriff geht jedoch darüber hinaus.

Um etwa die Kraft von Punktladungen a, b, c und d auf die Probeladung x zu bestimmen, bestimmen wir das elektrische Feld (und bei bewegten Systemen zusätzlich das magnetische Feld) einer jeden Punktladung einzeln, summieren diese auf und erhalten so die Kraft auf die Ladung x .

Daraus folgt, daß es genügt, die elektrischen und magnetischen Felder zu ermitteln und zu kennen, die von einer einzigen Punktladung ausgeübt werden.

Beispiel 2.3 Ein elektrischer Leiter sei von einem Strom durchflossen. Die Ablenkung einer Kompaßnadel zeigt ein Magnetfeld an. Zwei dicht benachbarte stromdurchflossene Drähte ziehen sich bei antiparalleler Stromrichtung an und stoßen sich bei paralleler Stromrichtung ab.

Magnetismus hat also mit bewegten Ladungen zu tun, entweder mit sich im Ortsraum bewegenden Ladungen im Draht oder mit stationären Elektronen im Atom, die sich nicht ausgleichen, sondern — wie im Eisen oder im Magnetit — in einer Richtung verstärken.

Beispiel 2.4 Zwei Kugeln mit einer gleich großen Überschußladung bewegen sich durch den Raum. Münchhausen sitzt auf einer dritten, gleich schnellen Kugel. Welche Wechselwirkung beobachtet er durch ein magnetisches Feld zwischen den Kugeln? Für ihn bewegen sich die Kugeln nicht. Daher ist die einzige Kraft, die er kennt, die COULOMB-Kraft, die ein ruhender Beobachter allerdings als LORENTZ-Kraft deutet:

$$= \times . \quad (2.6)$$

⇒ Magnetismus ist ein relativistischer Effekt. Im Fall 2.3 müssen wir eine relativistische Korrektur an ihrer Bewegungsgleichung anbringen, die in der Größenordnung

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad (2.7)$$

ist. Wir erwarten, daß dies proportional zur Kraft ist, mit der die beiden stromdurchflossenen Leiter wechselwirken. Da die Driftgeschwindigkeit der Elektronen etwa $100 \mu\text{m}/\text{sec}$ ist, wird die Korrektur

$$\frac{10^2 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{10}} \approx 10^{-25}! \quad (2.8)$$

Obwohl die elektrischen Ladungen nahezu vollständig ausbalanciert sind, ist wegen der Stärke der elektrostatischen Wechselwirkung das relativistische Glied trotz seiner Winzigkeit spürbar!

Im Gegensatz zur NEWTONSchen Mechanik ist die relativistische Korrektur der elektrischen Kraft die Ergänzung durch das Magnetfeld. Daher war es auch nicht erforderlich, für sehr hohe Geschwindigkeiten der elektrischen Ladung die Theorie der Elektrodynamik durch Zusatzterme zu erweitern.

3 Elektrostatik

3.1 Maxwell-Gleichungen

Ebenso wie die gesamte Mechanik aus den drei NEWTONSchen Axiomen folgt, entwickelt sich die Elektrodynamik aus den vier MAXWELL-Gleichungen, die wir zunächst anschreiben, um ihre mathematische Struktur zu beschreiben:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.4)$$

Wir sehen, daß in den Gln. (3.2) und (3.3) die beiden Felder miteinander verkoppelt sind, und zwar kreuzweise über Orts- und Zeitabhängigkeiten. Weiter stellen wir fest, daß es lineare Gleichungen sind, denn sie enthalten die zu bestimmende Größe in der ersten Potenz, also nicht z. B. quadratisch. Die Gleichungen sind inhomogen mit Ausnahme der vierten. Die erste Gleichung ist als POISSON-Gleichung bekannt, verschwindet sie, wird sie als LAPLACE-Gleichung bezeichnet. Die zweite Gleichung ist das FARADAYSche Induktionsgesetz, die dritte das sog. Durchflutungsgesetz mit der MAXWELLSchen Ergänzung. Die vierte Gleichung sagt uns schließlich, daß es keine magnetischen Monopole gibt, so, wie positive und negative elektrische Ladungen vorkommen. \mathbf{H} ist ein reines Wirbelfeld.

Für den statischen Fall: alle Ladungen sind im Raum fixiert oder bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit, verschwinden die Zeitableitungen:

Elektrostatik:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.6)$$

Magnetostatik:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.8)$$

Dabei sind die Konstanten

$$\varepsilon_0 c^2 = \frac{10^7}{4\pi} \quad (3.9)$$

und

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9. \quad (3.10)$$

Wie wir den Gln. (3.5) und (3.6) auf der einen und den Gln. (3.7) und (3.8) auf der anderen Seite entnehmen, sind im statischen Fall Elektrizität und Magnetismus separate Erscheinungen. Im elektrischen Fall liegt ein wirbelfreies Feld mit endlicher Ergiebigkeit, im magnetischen Fall ein divergenzfreies Wirbelfeld vor. Wir werden uns in den ersten Kapiteln dieser Thematik widmen.

3.2 Das Coulombsche Gesetz und das elektrische Feld

Warum ist das COULOMBSche Gesetz nicht in den MAXWELL-Gleichungen enthalten? Nur, damit sie schön symmetrisch bleiben?

Das COULOMBSche Gesetz beschreibt die wechselwirkende Kraft zwischen Punktladungen:

$$F_{12} = - F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}_{12}. \quad (3.11)$$

Wegen der Superponierbarkeit gilt dieses Gesetz auch für die Wechselwirkung zwischen Ensembles of Punktladungen.

Dabei ist das *elektrische Feld*, das die Ladung q_1 am Punkt (1) erzeugt und am Punkt (2) gemessen wird,

$$\mathbf{E}(2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}. \quad (3.12)$$

Der *vektorielle Charakter* bedeutet eine Zerlegung in die drei Raumkomponenten, z. B. für x :

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}, \quad (3.13)$$

die Superponierbarkeit

$$\mathbf{E}(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^3} \mathbf{r}_{1j}. \quad (3.14)$$

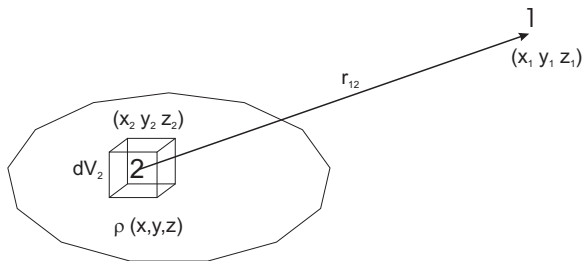


Abb. 3.1. Das elektrische Feld an der Stelle (1) rührt von der Verteilung von Ladungen an der Stelle (2) her und wird durch Volumen-Integration über die Verteilung erhalten. Prinzipiell kann die Stelle (1) sich auch innerhalb der wolkigen Ladungsträgerverteilung befinden.

3.2.1 Ladungsdichte

Prinzipiell sind Ladungen diskret aufgebaut, d. h. sie bestehen aus Einheiten, die sich durch bestimmte, ganzzahlige Intervalle unterscheiden. Aus größerer Distanz dagegen verschwimmen diese Unterschiede zu einem Kontinuum, und wir drücken dies durch die Einführung der Dichte der Ladungsträger oder der Ladungsdichte $\rho(x, y, z)$ aus:

$$dq_2 = \rho(2)dV_2 \quad (3.15)$$

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{\rho(x_2, y_2, z_2)dx_2 dy_2 dz_2(x_1 - x_2)}{4\pi\epsilon_0 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (3.16)$$

Damit können wir aus einer Verteilung von Ladungen ihr Feld an einer anderen Stelle bestimmen (Abb. 3.1).

Umgekehrt ergibt sich aus der 1. MAXWELL-Gleichung (3.1), daß $\nabla \cdot \mathbf{E}$, das Quellenfeld der elektrischen Feldstärke, als Quelle die elektrischen Ladungen bzw. deren räumliche Dichte hat, an denen die elektrischen Feldlinien beginnen und enden. Gegenteiliges gilt für das Magnetfeld, daher ist wegen der Nichtexistenz magnetischer Ladungen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

3.2.1.1 Superpositionsprinzip. Haben wir nach Gl. (3.16) die Feldstärken E_1 und E_2 zweier Ensembles der Dichten ρ_1 und ρ_2 ermittelt, dann wird die MAXWELL-Gleichung auch von der Summe $E_1 + E_2$ bzw. $\rho_1 + \rho_2$ gelöst.

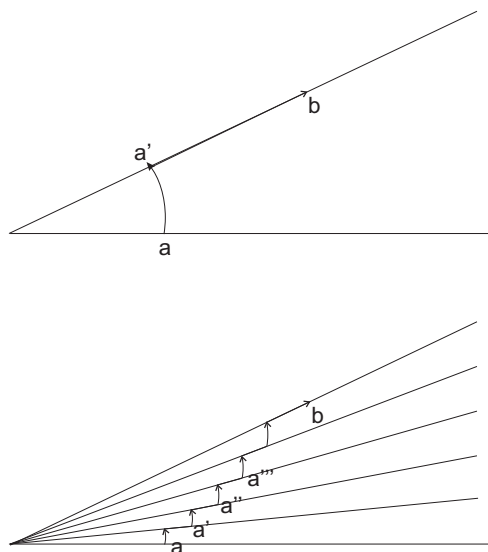


Abb. 3.2. Die Richtung des Feldes wird durch Feldlinien charakterisiert. Hohes Feld bedeutet hohe Feldstärke. Entlang der Feldlinien ändert sich das Potential. Feldlinien können sich nie kreuzen, denn das bedeutete verschiedene Gradienten des eindeutigen Potentials. Senkrecht zu den Feldlinien (von a nach a' usw.) ist das Potential also konstant (Äquipotentialfläche), und es wird keine Arbeit geleistet. Daher ist die Arbeit nur aus den einzelnen Beiträgen parallel zum Feld endlich und damit unabhängig vom beschrittenen Weg. Dieses Feld ist *radial homogen*.

3.3 Elektrisches Potential

Die Arbeit, die beim Verschieben einer bestimmten Ladung aus einer räumlichen Verteilung von Ladungen gegen die elektrische Kraft aufzubringen ist, berechnet sich nach

$$W = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.17)$$

die Richtung der Bewegung ist entgegengesetzt zu den Kraftkomponenten, über den Weg integriert, bzw. für die Arbeit der Einheitsladung Q :

$$W(\text{Einheit}) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.18.1)$$

und für parallele Vektoren

$$W(\text{Einheit}) = - \int_a^b E_x \cdot dx. \quad (3.18.2)$$

Das Ergebnis der Arbeit muß unabhängig vom zurückgelegten Weg sein, sonst könnte man dem Feld bei einem Zyklus Energie entnehmen (*Perpetuum mobile 1. Art*, Abb. 3.2):

$$- \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = \Phi(a) - \Phi(b) \quad (3.19)$$

Da (die auf die Einheitsladung bezogene) geleistete Arbeit nur von den Endpunkten abhängt, kann sie als Differenz zweier Zahlen, $\Phi(a)$ und $\Phi(b)$, angegeben werden. Definieren wir einen Punkt als Referenz, z. B. in der Unendlichkeit, dann können wir für eine im Ursprung sich befindende Ladung mit Gl. (3.19) schreiben

$$-\int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} \cdot dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \equiv \Phi(r), \quad (3.20)$$

und wir bezeichnen $\Phi(r)$ als (elektrostatisches) Potential der Ladung q an der Stelle r . Das Superpositionsprinzip gilt auch für Potentiale, so daß wir für ein Ensemble von Ladungen auch

$$\Phi(r_1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}} \quad (3.21.1)$$

bzw. für eine Ladungsdichte

$$\Phi(r_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r_2) dV_2}{r_{12}} \quad (3.21.2)$$

schreiben können. Damit ist die an der Einheitsladung Q entlang der Strecke geleistete Arbeit

$$dW = \Phi(x + dx, y, z) - \Phi(x, y, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx, \quad (3.22)$$

woraus durch Vergleich mit Gl. (3.18.2)

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \text{ zyklisch} \quad (3.23.1)$$

folgt, oder vektoriell

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (3.23.2)$$

die das skalare Potentialfeld mit dem vektoriellen elektrischen Feld verknüpft. Konkret bedeutet das die Gradientenbildung des Feldes $1/r$:

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{r}. \quad (3.24)$$

Wenn \mathbf{E} der Gradient eines skalaren Feldes ist, dann muß das elektrische Feld frei von Wirbeln sein:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\nabla\Phi) = (\nabla \times \nabla)\Phi = 0. \quad (3.4)$$

3.4 Die elektrische Feldstärke als Flußdichte

Der Zusammenhang zwischen einem Entfernungsgesetz für die Strahlungsdichte (optisch oder akustisch) und dem COULOMBSchen Gesetz war so augenfällig, daß versucht wurde, auch die von einer positiven Ladung ausgehenden und von einer negativen Ladung aufgenommenen Feldlinien als Fluß zu deuten, obwohl kein Materiefluß beobachtet wird. Wenn so ein Fluß oder die Dichte eines Flusses wäre, müßte er in der Nähe einer Punktladung eine $1/r^2$ -Abhängigkeit zeigen. Die Ergiebigkeit dieses Flusses ist ursächlich verknüpft mit der Anwesenheit von Ladungen; ein Gebiet, das keine Ladungen enthält und nur von Feldlinien „durchströmt“ wird, hat die Divergenz Null.

Wenn die Ladung innerhalb des Volumens sich befindet, und warum soll das Volumen keine Kugel sein?, ist der Wert von $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ überall auf der Oberfläche

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (3.25.1)$$

und seine Richtung ist senkrecht zur Oberfläche der Kugel (Äquipotentialfläche). Der Fluß selbst ist dann das Produkt aus Flußdichte und Oberfläche:

$$F = \oint \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot r^2 \int \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.25.2)$$

und damit — wie die Strahlungsfluß — unabhängig von der Oberfläche. Der Fluß durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung, dividiert durch ϵ_0 . Von Gl. (3.25.2) wissen wir, daß

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV, \quad (3.26)$$

und damit ergibt sich die 2. MAXWELLSche Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.5)$$

3.5 Elektrische Felder

3.5.1 Homogen geladene Kugel

Wenn die Kugel nur an der Oberfläche geladen wäre, wäre das elektrische Feld innerhalb der Kugel Null. Betrachten wir eine Oberfläche des Radius r innerhalb der Kugel, dann ist nach Gl. (3.25.2)

$$E_n \, dA = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (3.27)$$

wobei die Ladung q gleich dem Produkt der Ladungsdichte mit dem eingeschlossenen Volumen ist:

$$q = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho. \quad (3.28)$$

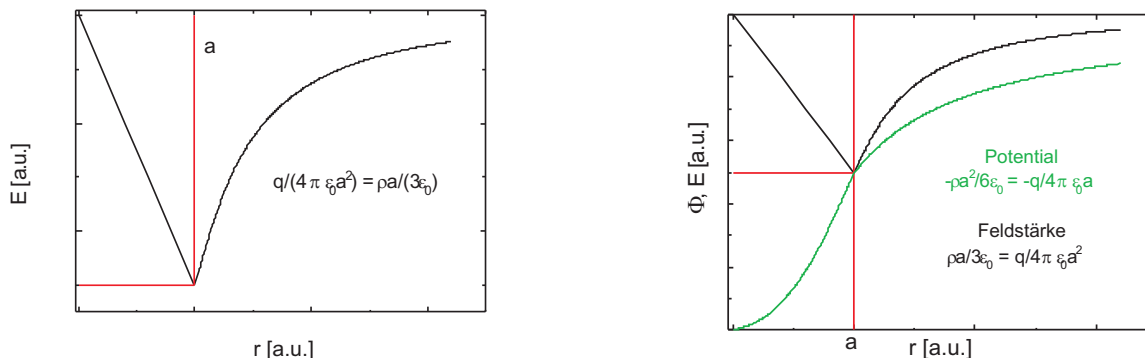


Abb. 3.3. Lks.: Das Feld einer Kugel mit homogener Ladungsverteilung ist innerhalb der Kugel dem Radius direkt und außerhalb dem Quadrat des Abstands vom Mittelpunkt umgekehrt proportional. Re.: Das bedeutet für das Potential einen parabolischen Anstieg bis zur Kugeloberfläche; danach einen Anstieg, der umgekehrt proportional zum Abstand ist. $r \rightarrow \infty : \Phi, E = 0$)

Damit ergibt sich das Feld innerhalb der Kugel zu (Abb. 3.3)

$$E = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r, E_{\min} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho a. \quad (3.29)$$

Da das Potential nach Gl. (3.19) das negativ zu nehmende Linienintegral über die Feldstärke ist, bekommen wir einen parabolischen Anstieg innerhalb der Kugel, außerhalb einen Anstieg mit $1/r$. Im Unendlichen verschwinden dann das Potential und die Feldstärke.

3.5.2 Unendlich langer Draht

In einem unendlich langen Draht sei die Ladungsdichte gleich. Das elektrische Feld zeigt radial nach außen. Wäre dies nicht so, gäbe es also axiale Komponenten in Richtung eines Endes, müßte es durch entsprechendes Gegenfeld kompensiert werden, woraus wieder ein ausschließlich radiales Feld resultierte (Abb. 3.4).

Wir betrachten also den Fluß durch die Manteloberfläche des Zylinders (die Endflächen durchströmt kein Fluß) mit dem Radius r und der Länge l :

$$F = \int_A E_n dA = 2\pi r l E = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (3.30)$$

wobei die Ladungen über den Draht homogen verteilt sind, so daß man (analog zu unseren Definitionen der Flächen- und Raumladungsdichte σ und ρ) eine Längendichte definieren kann als

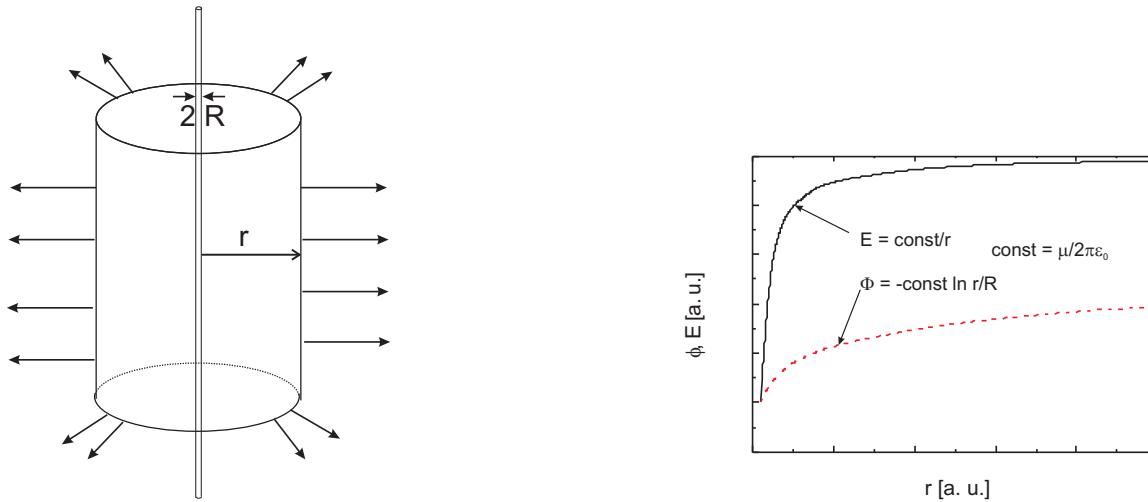


Abb. 3.4. Eine zylindrische GAUSSsche Oberfläche, die einen Draht mit homogener Ladungsverteilung nach außen abschließt. Das Feld fällt radial und hyperbolisch ab.

$$q = \mu l. \quad (3.31)$$

Damit wird für das Feld aus Gln. (3.30) und (3.31)

$$E = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} ; \quad (3.32)$$

Das Feld ist proportional zur Ladungsdichte und sinkt hyperbolisch (mit $1/r$) ab. Damit wird für das Potential mit der Definitionsgleichung

$$\Phi = - \int E \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + \text{const}; \quad (3.33)$$

es hängt also logarithmisch vom Abstand zum Draht ab. Die Konstante U_0 kann allerdings nicht mit der Randbedingung des Potentials im Unendlichen bestimmt werden, da die Schlußgleichung für $r \rightarrow \infty$ gegen Unendlich strebt, was mit unserer Anfangsannahme eines unendlich langen Drahts zusammenhängt.

3.5.3 Homogen geladene Ebene (Blatt)

Das Feld muß auf beiden Seiten der Ebene aus Symmetriegründen senkrecht stehen, bei gleichen Abständen von ihr den gleichen Betrag haben und entgegengesetzt gerichtet sein. Die Ladungsdichte ist σ , damit ist

$$F = \int_A E_n \, dA = EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} ; \quad (3.34)$$

Beim Durchtritt durch das Blatt erfolgt ein Feldsprung um $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ von $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ nach $+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Damit hängt das Feld einer unendlich ausgedehnten geladenen Ebene nicht vom Abstand von der Ebene ab; es ist homogen. Ihr Potential ist daher eine lineare Funktion des Abstandes x .

3.5.4 Feld zwischen zwei homogen geladenen Ebenen

Sind auf zwei parallel zueinander stehenden Platten die jeweils gleiche Menge Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens verteilt, ist das Gesamtfeld die Superposition der einzelnen Felder:

$$E = \sum_{i=1}^2 E_i = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.35)$$

3.5.5 Innerhalb eines elektrischen Leiters

Ein elektrischer Leiter, also z. B. ein Stück Draht, enthält viele „freie“ Elektronen. Das bedeutet: sie können sich nahezu frei im Festkörper bewegen, wenn etwa ein elektrisches Feld angelegt wird, aber sie können ihn nicht verlassen. Die Bewegung, die durch ein elektrisches Feld ausgelöst wird, dauert entweder so lange, bis die Ursache abgeschaltet worden ist, oder bis sie sich so angeordnet haben, daß sie kein Feld mehr bewegt. Das ist im Innern eines jeden Leiters der Fall. Dort ist das Feld Null. Das bedeutet, daß der Gradient des Potentials Φ Null ist, sich also nicht ändert:

Satz 3.1 *Jeder elektrische Leiter ist ein Äquipotentialgebiet; seine Oberfläche ist eine Äquipotentialfläche. Da das elektrische Feld überall Null ist, ist auch die Divergenz Null: im Innern eines elektrischen Leiters ist nach dem GAUSSschen Gesetz die Ladungsdichte Null.*

Auf der Oberfläche, einer Äquipotentialfläche, steht das elektrische Feld immer senkrecht; es gibt keine Tangentialkomponente.

3.5.6 Innerhalb eines metallischen Hohlraums

Wir betrachten eine beliebig geformte, geschlossene metallische Hohlfläche. Auf dieser Oberfläche kann sich keine Nettoladung befinden. Aber können sich dort einzelne positive und negative Ladungen ohne Ladungsausgleich aufhalten?

Sollte das der Fall sein, dann kann man eine Feldlinie von \oplus zu \ominus ziehen, deren Linienintegral $\int E ds$ verschieden von Null ist. Für eine geschlossene Schleife (für das Linienintegral in der Elektrostatik immer Null ist), geht sie durch das Metall, für das $\int E ds = 0$. Daher können in einem metallischen Hohlraum keine Felder existieren, was die perfekte Abschirmwirkung eines FARADAY-Käfigs erklärt. Kein noch so großes Feld auf einer Seite eines Abschirmblechs kommt auf der anderen Seite „an“.

Das ist ein wesentlicher Unterschied zum Gravitationsfeld. So ist es z. B. für die Gravitationswirkung zwischen Sonne und Erde gleichgültig, ob sich der Mond bei einer Sonnenfinsternis zwischen die beiden Himmelskörper schiebt.

3.6 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 3.1 Mit welcher Kraft stoßen sich zwei gleichnamige, punktförmige Ladungen von je $1 \mu\text{C}$ in der Entfernung 1 m ab?

Lösung. $F = 8,9 \text{ mN}$.

Aufgabe 3.2 Zwei gleiche Kugeln des Gewichts $0,5 \text{ p}$ sind an 1 m langen, oben am selben Punkt befestigten Fäden aufgehängt und tragen gleiche Ladungen. Wenn die Kugelmitten 20 cm Abstand voneinander haben: wie groß sind die Ladungen auf den Kugeln?

Lösung.

Die Kugeln würden, der Gravitation folgend, senkrecht nach unten hängen, werden aber durch die elektrostatische WW ausgelenkt (Abb. 3.5).

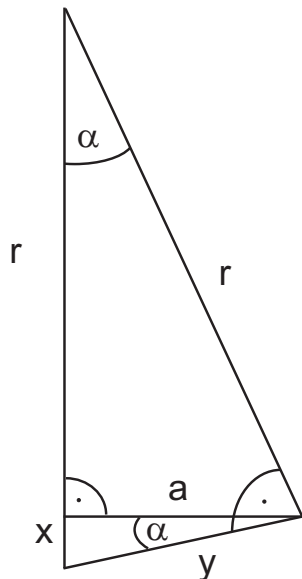


Abb. 3.5. Halbbild der Auslenkung. $r = 100 \text{ cm}$, α ist der durch die elektrostatische Auslenkung erzwungene Ablenkwinkel von der Normalen.

Als erstes ist der Auslenkwinkel α zu bestimmen.

$$\sin \alpha = \frac{a}{r} = \frac{10}{100} = 0,1 \Rightarrow \alpha = 5,74^\circ. \quad (1)$$

Damit ergibt sich die Strecke x zu

$$x = \tan \alpha \cdot 10 \text{ cm} = 1,005 \text{ cm.} \quad (2)$$

Um diese Strecke ist durch die elektrost. WW die Normale verkürzt. Nach PYTHAGORAS ist dann

$$0,5^2 = 0,98995^2 \cdot 0,5^2 + F_{\text{el}}^2 \Rightarrow F_{\text{el}} = 0,5 \cdot \sqrt{1 - 0,98995^2} \text{ p} = 0,0707 \text{ p.} \quad (3)$$

Daraus ergibt sich dann die symmetrisch verteilte Ladung zu

$$Q^2 = 4\pi\epsilon_0 r^2 \Rightarrow Q^2 = 0,0707 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} \cdot 112,21 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1^2 \text{ Coul}^2. \quad (4)$$

$$Q = 27,8 \text{ nCoul.} \quad (5)$$

Aufgabe 3.3 Wie groß ist das elektrische Feld am Punkt P außerhalb einer Kugel, die von einer homogenen Ladungsverteilung erfüllt ist?

Lösung. Der Vektor des elektrischen Feldes steht auf der Oberfläche einer Kugel überall senkrecht (Abb. 3.6).

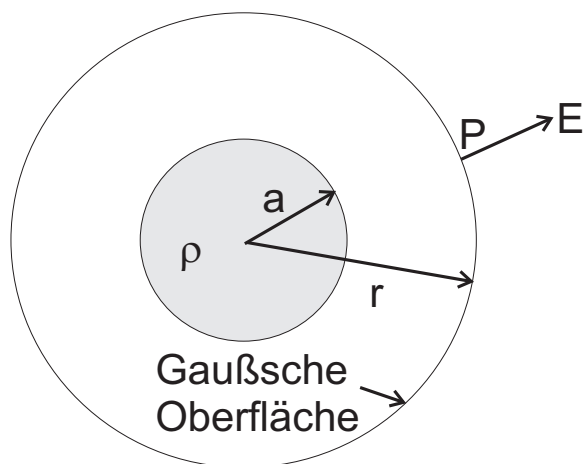


Abb. 3.6. Ein homogen verteiltes Ensemble von Ladungen der Ladungsdichte ρ erzeugt ein elektrisches Feld, dessen Stärke mittels des GAUSSschen Satzes bestimmt werden kann.

Der nach außen gerichtete Fluß, der z. B. an der GAUSSschen Oberfläche ankommt, ist

$$E_n dA = E \cdot 4\pi r^2, \quad (1)$$

der nach dem GAUSSschen Gesetz gleich der Gesamtladung (dividiert durch ϵ_0) ist:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (2)$$

Dies ist die gleiche Formel wie die für eine Punktladung! Damit ist NEWTONS Theorem der Gravitation, daß nämlich in einer Massenverteilung diese im Schwerpunkt konzentriert gedacht (und damit gerechnet) werden kann, in der Elektrostatik bewiesen.

Aufgabe 3.4 Zeichnen Sie den ungefähren Verlauf der Feldlinien zwischen einer positiven und einer negativen Punktladungen, indem Sie mit der Feldverteilung um eine positive Ladung beginnen! Denken Sie daran, daß die elektrische Feldstärke als Gradient des elektrischen Potentials senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht.

Lösung. Die Äquipotentialflächen um eine Punktladung sind konzentrische Kugelflächen, auf denen das elektrische Feld als Normale leicht zu zeichnen ist (Abbn. 3.7 u. 3.8).

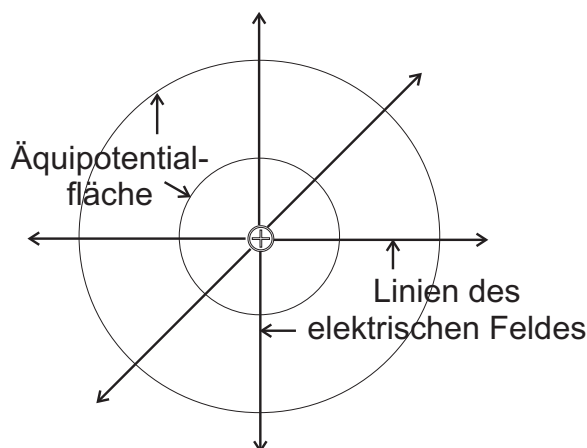


Abb. 3.7. Eine isolierte Punktladung erzeugt konzentrische Kugelflächen als Äquipotentialflächen, auf denen der elektrische Feldstärkevektor leicht als Flächennormale eingezeichnet werden kann. Die Gegenladungen befinden sich im Unendlichen. Die Feldlinien beginnen auf den Oberflächen der positiven Ladungen und enden auf denen der negativen.

Bei Annäherung einer zweiten Ladung entgegengesetzten Vorzeichens verformen sich die Äquipotentialflächen, die nach Gl. (3.20) berechnet werden. Oder die Feldlinien verformen sich, die nach Gl. (3.12) berechnet werden; da sie überall senkrecht auf die Äquipotentialflächen stoßen, verformen sich diese ebenfalls. M. a. W.: eine geometrische Konstruktion unmöglich (Abb. 3.8)!

Das schöne Superpositionsprinzip erweist sich als nicht mächtig genug, ein einfaches Bild der Feldlinien zu erzeugen.

Aufgabe 3.5 In den Ecken eines Quadrates befindet sich je eine Ladung Q . Welche Kraft wirkt auf jede Ladung, wenn

- alle gleiche Vorzeichen haben,

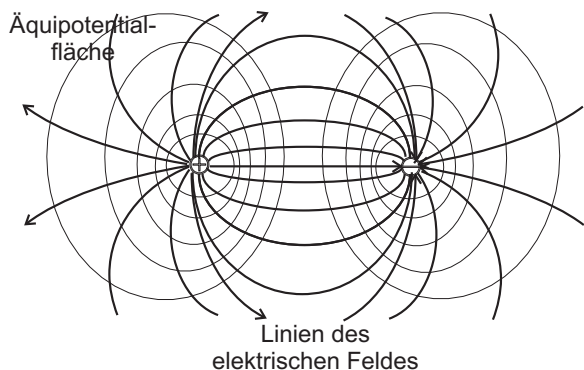


Abb. 3.8. Bei Annäherung einer zweiten Punktladung verformen sich Äquipotentiallinien und Feldlinien gegenseitig, eine geometrische Konstruktion ist unmöglich.

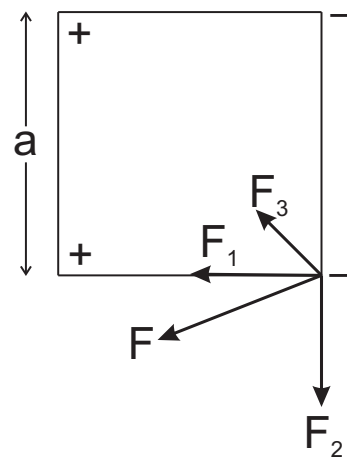
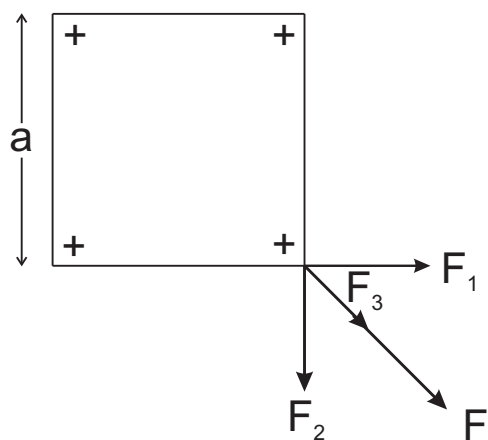


Abb. 3.9. Zur Symmetrie beim COULOMBSchen Gesetz. Sich gleichsinnig abstoßende und als Quadrupol sich anziehende Ladungen.

- je zwei negative und zwei positive sich jeweils diagonal gegenüberstehen?

Lösung.

Fall 1: Sich gleichsinnig abstoßende Ladungen A (Abb. 3.9.1):

$$|F_1| = |F_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}, \tag{1}$$

$$|F_3| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(\sqrt{2}a)^2}, \tag{2}$$

$$|F| = |F_1| + |F_2| + |F_3| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right), \tag{3}$$

Fall 2: Als Quadrupol angeordnete, sich gegenseitig an- und abstoßende Ladungen (Abb. 3.9.2):

$$|F_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}, \quad (4)$$

$$|F_2| = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}, \quad (5)$$

$$|F_3| = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(\sqrt{2}a)^2}, \quad (6)$$

$$|F_x| = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} (1 + F_3 \cos 45^\circ), \quad (7.1)$$

$$|F_x| = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} (1 + \sqrt{2}), \quad (7.2)$$

$$|F_y| = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} (1 - F_3 \cos 45^\circ), \quad (8.1)$$

$$|F_y| = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} (1 - \sqrt{2}), \quad (8.2)$$

Die beiden Komponenten schließen einen Winkel ein, dessen Tangens sich nach

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4 - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \quad (9)$$

berechnet. Damit ergibt sich für den Betrag der beiden Kraftkomponenten (zyklisch)

$$|F| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} \frac{3}{2}. \quad (3)$$

Aufgabe 3.6 Nach dem BOHRschen Atommodell umkreist im Wasserstoff-Atom ein Elektron im Abstand des BOHRschen Radius von $0,529 \text{ \AA} = 0,0529 \text{ nm}$ den Atomkern, ein Proton. Berechnen Sie das Verhältnis der Gravitations-WW zur elektrostatischen WW für das Wasserstoff-Atom im Grundzustand ($e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Coul}$)!

Lösung.

$$F_{\text{Coul}} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}, \quad (1)$$

$$F_{\text{grav}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2)$$

$$F_{\text{grav}} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1836 \cdot (9,11 \cdot 10^{-31})^2}{(0,529 \cdot 10^{-10})^2} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2} \text{ kg}^2 \text{ m}^{-2}. \quad (3)$$

$$F_{\text{grav}} = 6,67 \cdot 9,11^2 \cdot 1,836/0,529^2 \cdot 10^{-47} \text{ N} \quad (4)$$

$$F_{\text{grav}} = 3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N} \quad (5)$$

Damit ergibt sich ein Verhältnis der beiden Kräfte von $2,3 \cdot 10^{39}$ zugunsten der elektrostatischen Wechselwirkung.

Aufgabe 3.7 Wie schwer müßten zwei gleich schwere Massen sein, damit sie sich im Abstand des BOHRschen Radius mit derselben Kraft anziehen wie zwei Elementarladungen?

Lösung. Die Massen müßten $2 \mu\text{g}$ schwer sein.

Aufgabe 3.8 Stellen Sie sich zwei gleiche Ladungen im Abstand Sonne/Erde vor, die die gleiche Kraft aufeinander ausüben sollen wie die beiden Himmelskörper. Wie groß (in Einheiten der Elementarladung) müssen die Ladungen sein? Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der AVOGADRO-Konstanten!

Lösung. Die Ladungen betragen $2,95 \cdot 10^{17}$ Coul, d. h. weniger als 1 ppm der AVOGADRO-Konstanten.

Aufgabe 3.9 Wie groß ist die COULOMBSche WW der Ionen in NaCl (Bindungsabstand: $2,5 \text{ \AA}$), angenommen, die Ionen seien kugelförmig und trügen jeweils eine ganze Elementarladung?

Lösung.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{r} = 5,75 \text{ eV}. \quad (1)$$

Aufgabe 3.10 Bestimmen Sie nun den klassischen Elektronenradius aus der Ruheenergie des Elektrons und dem Ansatz einer auf der Oberfläche einer Kugel gleichmäßig verteilten Ladung.

Lösung.

Die Energiedichte eines elektromagnetischen Feldes ist im Vakuum gegeben durch

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2, \quad (1)$$

im elektrischen Feld allein (Ladung in Ruhe):

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (2)$$

Das elektrische Feld einer Punktladung Q ist

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (3)$$

damit

$$u = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}. \quad (4)$$

Damit ergibt sich die gesamte Energie U , wenn man über das Volumenelement $4\pi r^2 dr$ integriert:

$$U_{\text{elec}} = \int_a^\infty u \cdot 4\pi r^2 dr = \int_a^\infty \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr, \quad (5)$$

wobei a der Radius der Kugel sei, auf der die Ladung gleichmäßig verteilt ist, so daß man erhält:

$$U_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}, \quad (6)$$

was mit der Ruheenergie $E = m_0 c^2$ und für $Q = e_0$

$$U_{\text{elec}} = \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = m_0 c^2 \quad (7)$$

ergibt. Also ist der klassische Elektronenradius

$$r_{\text{kl}} = \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} = \frac{e_0^2}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{m_0 c^2} \Rightarrow r_{\text{kl}} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (8)$$

Aufgabe 3.11 Bestimmen Sie schließlich den klassischen Elektronenradius aus der Ruheenergie des Elektrons und dem Ansatz einer homogen im Volumen einer Kugel verteilten Ladung.

Lösung. Zu der im Außenraum gleichen Feldenergie kommt jetzt noch ein Beitrag hinzu.

$$\varepsilon = \int u d^3x = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_0^R E^2(r) 4\pi r^2 dr, \quad (1)$$

mit

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_0}{a^3} r, \quad (2)$$

wenn a der Radius der Kugel ist. Also wird aus (1)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a E^2(r) 4\pi r^2 dr, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^a r^4 dr, \quad (4)$$

also

$$\frac{1}{5} \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a}. \quad (5)$$

Damit ergibt sich ein geringfügig anderer Wert:

$$r_{\text{kl}} = \frac{3e_0^2}{5} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{m_0 c^2}. \quad (6)$$

4 Potential und elektrisches Feld

4.1 Dipolpotential

Unter Verwendung der Gln. (3.21) wird für zwei Ladungen $+Q$ und $-Q$, die um d voneinander getrennt sind, das Potential an der Stelle (x, y, z) (Abb.4.1):

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+Q}{[(z - (1/2)d)]^2 + x^2 + y^2} + \frac{-Q}{[(z + (1/2)d)]^2 + x^2 + y^2} . \quad (4.1)$$

Dieser Fall eines Ladungsensembles ist wichtig für das Potential zweier gegensätzlicher Ladungen, die um einen Abstand getrennt sind, der klein ist gegen die Entfernung, an der das Potential bestimmt wird. Man spricht von einem Dipol, z. B. Wasser oder Ammoniak, aber auch der HERTZsche Dipol, der zur Abstrahlung von Rundfunkwellen benutzt wird.

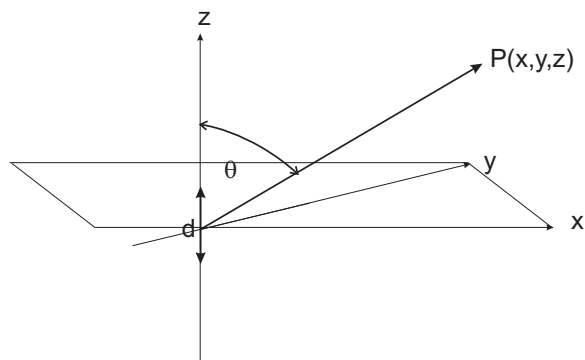


Abb. 4.1. Das elektrische Feld an der Stelle $P(x, y, z)$ eines weit entfernten Dipols μ , der aus zwei Ladungen $+e_0$ und $-e_0$ im Abstand d besteht.

4.1.1 Approximatives Dipolpotential

Für den Fall, daß die beiden Ladungen immer näher aneinanderrücken, so daß $d \rightarrow 0$, löschen die Ladungen sich aus, und das Potential verschwindet. Für sehr kleine Abstände allerdings kann man Gl. (4.1) entwickeln, wobei wir zunächst von einer Binomial-Entwicklung Gebrauch machen und Glieder höherer Ordnung in h vernachlässigen:

$$z - \frac{d}{2} \approx z^2 - zd. \quad (4.2)$$

Wegen der Kugelgleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.3)$$

wird

$$z - \frac{d}{2} + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right), \quad (4.4)$$

und damit wird für die Formel

$$\frac{1}{[(z - (1/2)d)^2 + x^2 + y^2]} \approx \frac{1}{r^2[1 - (zd/r^2)]} \approx \frac{1}{r} \frac{1}{1 - (zd/r^2)}, \quad (4.5.1)$$

die nach erneuter Entwicklung von $1/\sqrt{1+x} \approx 1 - 1/2x$

$$\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right) \quad (4.5.2)$$

ergibt. Entsprechend für die andere Hälfte der Gl. (4.1)

$$-\frac{1}{[(z + (1/2)d)^2 + x^2 + y^2]} \approx -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right) \quad (4.5.3)$$

ergibt. Damit ergibt sich als Summe für das skalare Potential eines Dipols

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} Qd : \quad (4.6)$$

das Potential eines Dipols ist proportional dem Produkt aus Ladung und Abstand, dem *Dipolmoment* μ . Beachten wir noch, daß

$$z = r \cos \theta, \quad (4.7)$$

wobei θ der Winkel zwischen der Dipolachse und dem Radiusvektor zum Punkt (x, y, z) ist, können wir Gl. (4.6) schreiben als

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mu \cos \theta}{r^2} : \quad (4.8)$$

Das Potential eines Dipols fällt mit $1/r^2$ von der Dipolachse ab, das elektrische Feld folglich mit $1/r^3$. Weil sich die Felder der beiden ungleichnamigen Ladungen teilweise kompensieren, fällt es steiler ab als das Potential einer Punktladung. Gl. (4.7) eröffnet uns noch den Weg einer besonders eleganten, vektoriellen Schreibweise für das Potential des Dipols, ist doch

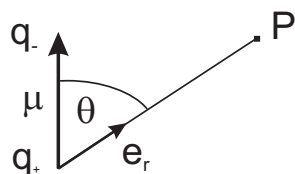


Abb. 4.2. Der Dipol in vektorieller Schreibweise.

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r \mu} \quad (4.9)$$

mit \mathbf{r} dem Einheitsvektor des Radiusvektors, wenn der Punkt (x, y, z) durch charakterisiert wird. Damit erhalten wir für das Potential eines Dipols (Abb. 4.2):

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}, \quad (4.10.1)$$

eine Formel, die für jede beliebige Orientierung der Dipolachse zum Radiusvektor gilt. Danach ist das Potential auf der Symmetrieebene des Dipols Null, nicht aber das Feld (Abb. 4.3).

Da nach Gl. (3.24) $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$, kann man für das Potential eines Dipols auch unter Beachtung der Definition für das Dipolmoment

$$\Phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \frac{e_0}{r} = \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \phi(r) \quad (4.10.2)$$

schreiben: Das Potential eines Dipols, der hier aus zwei Elementarladungen bestehen soll ($q = e_0$), ist die Feldstärke einer Punktladung, $\phi(r)$, skalar multipliziert mit dem Abstand der beiden den Dipol konstituierenden Teilladungen, was eine Manifestation des Superpositionsprinzips ist.

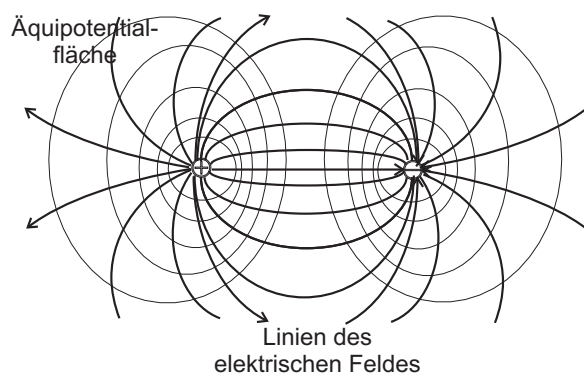


Abb. 4.3. Elektrischer Dipol: Äquipotentialflächen, aus denen der elektrische Feldstärkevektor als Flächennormale (Gradient) entsteht. Die Feldlinien beginnen auf den Oberflächen der positiven Ladungen und enden auf denen der negativen, so daß das Potential auf der Dipolachse Null wird.

4.1.2 Das elektrische Feld eines Dipols

ermitteln wir komponentenweise aus Gl. (4.10.1) ($z \parallel \mu$) unter Beachtung von $r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, so daß

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = \frac{r^3 - \frac{3}{2}zr2z}{r^6}, \quad (4.11.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r^3} = \frac{-3zr2x}{2r^6}, \quad (4.11.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} = \frac{-3zr2y}{2r^6}, \quad (4.11.3)$$

woraus mit (4.7)

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = -\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}, \quad (4.12.1)$$

wird, sowie

$$E_x = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5} \wedge E_y = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}, \quad (4.12.2)$$

die zusammengefaßt eine Komponente ergeben, die senkrecht zur z -Achse (und damit zur Dipolachse) in der xy -Ebene orientiert ist, und die daher die *transversale* Komponente genannt wird (Abb. 4.4):

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos\theta \sin\theta}{r^3}, \quad (4.12.3)$$

da

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 - z^2} = r \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} = r \sqrt{1 - \cos^2\theta} = r \sin\theta. \quad (4.13)$$

Für $\theta = 0^\circ$ und $\theta = 90^\circ$ ist nach Gl. (4.13) die transversale Komponente Null; das Feld besteht hier nur aus einer axialen Komponente, wobei das Feld für $\theta = 0^\circ$ doppelt so groß und entgegengesetzt dem Feld bei $\theta = 90^\circ$ gerichtet ist. Der Gesamtbetrag der elektrischen Feldstärke ergibt sich zu

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2} = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}. \quad (4.14)$$

Eine sehr viel elegantere Ableitung ergibt sich direkt aus Gl. (4.10) zu

$$= -\nabla\Phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3}. \quad (4.15.1)$$

Ausdifferenzieren ergibt z. B. für den ersten Term der Summe

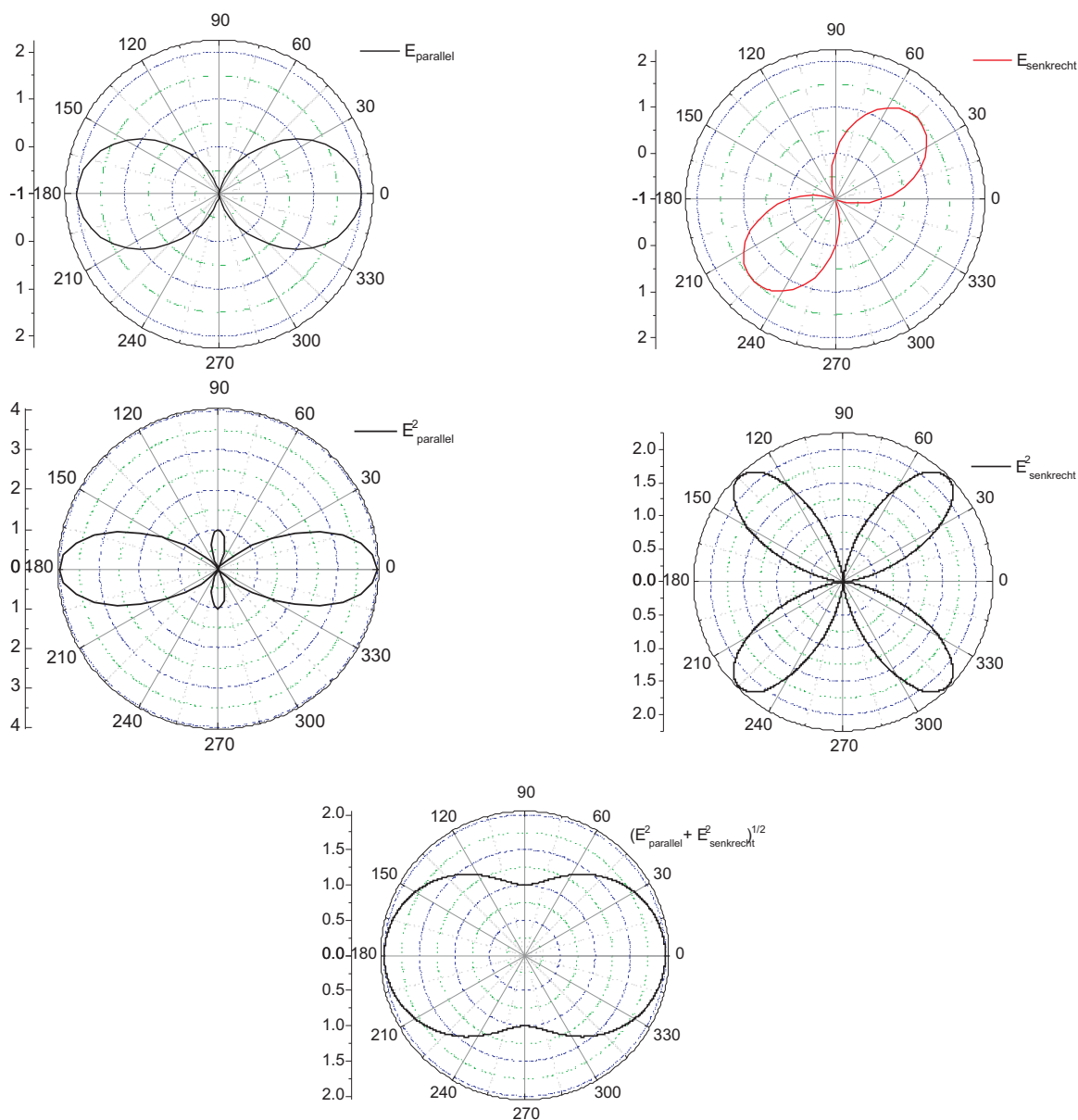


Abb. 4.4. Oben: Die Komponenten der Feldstärke eines Dipols. Für $\theta = 0^\circ$ (Sender und Empfänger stehen parallel) und $\theta = 90^\circ$ (Sender und Empfänger stehen senkrecht zueinander) ist nach Gl. (4.13) die transversale Komponente Null; das Feld besteht hier nur aus einer axialen Komponente (lks.), wobei das Feld für $\theta = 0^\circ$ doppelt so groß und entgegengesetzt dem Feld bei $\theta = 90^\circ$ gerichtet ist; re.o.: das transversale Feld. M. lks.: Das Quadrat der Komponente der axialen Feldstärke, M.re.: das Quadrat der transversalen Komponente. Unten die für die vom Dipol abgestrahlte Energie wichtige gesamte Feldstärke, berechnet nach Gl. (4.14).

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu_x x) = \mu_x, \quad (4.15.2)$$

also für drei (kartesische) Komponenten:

$$\nabla(\cdot) = \mu_x + \mu_y + \mu_z = , \quad (4.15.3)$$

während der zweite Term, z. B. in x -Richtung, ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} = -3r^{-4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (4.15.4)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (4.15.5)$$

oder

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2}{r}, \quad (4.15.6)$$

so daß insgesamt sich für die x -Komponente

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^5}, \quad (4.15.7)$$

und für die drei Komponenten sich entsprechend

$$\nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^5}, \quad (4.15.8)$$

ergeben. Damit folgt für das elektrische Feld

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{3(\cdot)}{r^2} = . \quad (4.15.9)$$

4.2 Influenz und Bildkraft

Wird nach Abb. 4.5 eine Probeladung vor eine Metallplatte gebracht, die frei bewegliche, d. h. insbesondere verschiebbare, Elektronen enthält, dann krümmen sich die Feldlinien derart, daß sie normal auf der Oberfläche stehen. Jede tangentielle Feldlinie würde solange Ladungen verschieben, bis sie senkrecht auf der Metalloberfläche stünde.

Wenn der horizontale Abstand zur Metalloberfläche x sei, dann ist die Feldkomponente der positiven Punktladung

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (4.16.1)$$

Wenn wir dazu das entgegengesetzt gleiche elektrische Feld addieren, das von der negativen (virtuellen) Bildladung erzeugt wird, bekommen wir

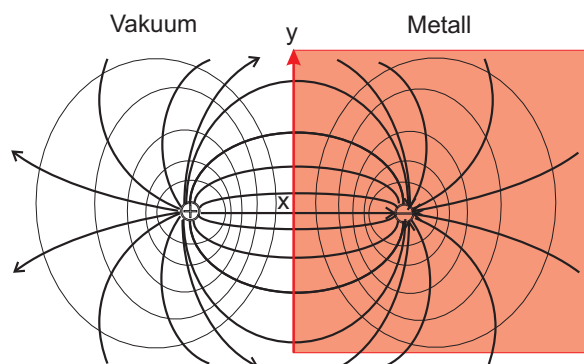


Abb. 4.5. Die Feldlinien einer Probeladung vor einer metallischen Fläche enden auf dieser senkrecht. Die Ladungen werden im metallischen Volumen verschoben, wodurch ein zusätzliches Feld entsteht.

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (4.16.2)$$

bzw. für die Ladungsdichte an der Oberfläche

$$\sigma(r) = \epsilon_0 E(y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (4.17)$$

Die Größe der entstandenen Bildladung ermitteln wir damit zu

$$Q = \int \sigma(r) dA = \int \sigma(r) 2\pi r dr, \quad (4.18)$$

also zu

$$Q = - \int_{y=0}^{y=\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{2Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} 2\pi r dr. \quad (4.19)$$

Substituieren wir $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, wird

$$Q = -Qx \int_{r=0}^{r=\infty} r \frac{dr}{r^3}, \quad (4.20)$$

woraus

$$Q = Qx \int_{y=0}^{y=\infty} \frac{1}{r = \sqrt{x^2 + y^2}} dy \Rightarrow Q = Qx \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right] = -Q \quad (4.21)$$

folgt. Diese Spiegelladung scheint bei $-x$ zu liegen, so daß der Abstand der beiden Ladungen $2x$ wäre, womit die tatsächlich ausgeübte Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2x)^2} \quad (4.22)$$

ist.

4.3 Der Kondensator

4.3.1 Der Parallelplatten-Kondensator

Wir geben zwei gleich große (Fläche A), metallische Platten im Abstand d vor, auf denen eine jeweils gleiche Anzahl entgegengesetzter Ladungen Q verteilt ist, so daß das Feld zwischen den Platten gegeben ist durch (Abb. 4.6)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (4.23)$$

[außerhalb ist es Null, und jede einzelne Platte liefert die Hälfte, s. a. Gl. (3.34)] und ihre Potentialdifferenz

$$U = - \int_1^2 E \, ds = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (4.24)$$

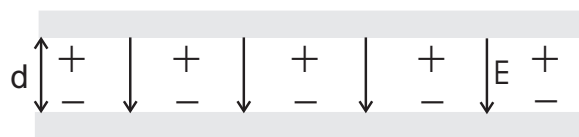


Abb. 4.6. Parallelplatten-Kondensator. Auf den Platten der Fläche A ist die Ladungsdichte $\sigma = Q/A$.

Die Potentialdifferenz oder Spannung ist die Arbeit pro Einheitsladung, die erforderlich ist, um eine Ladung von der einen zur anderen Platte zu bringen; diese Arbeit kann negatives oder positives Vorzeichen haben:

$$U = Ed = \frac{d\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{d}{\varepsilon_0 A} Q. \quad (4.25)$$

Die Spannung ist also wegen des Superpositionsprinzips

- proportional zum Abstand der Platten,
- proportional zur Ladungsdichte (und damit zur Ladung überhaupt),

und wir fassen den Bruch zur (inversen) *Kapazität* zusammen:

$$U = \frac{Q}{C}, \quad (4.26)$$

was für den speziellen Fall des Plattenkondensators

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (4.27)$$

ergibt.

4.3.1.1 Speicherung von Ladung. Mit dem Plattenkondensator speichern wir Ladung nach Gl. (4.27), und zwar um so mehr,

- je größer die Fläche der Platten und
- je kleiner ihr Abstand zueinander ist.

Dabei nehmen wir zunächst an, daß sich zwischen den Platten Luft oder Vakuum befindet. Es hat sich gezeigt, daß das Einbringen eines sog. *Dielektrikums*,¹ einen zusätzlichen Freiheitsgrad der Ladungsspeicherung ermöglicht. Dies wird durch einen zusätzlichen Faktor ε , die relative oder einfach Dielektrizitätskonstante,² in der Gl. (4.27) berücksichtigt:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d}. \quad (4.28)$$

4.3.2 Der Kugelkondensator

Unter einem Kugelkondensator verstehen wir zwei konzentrische Kugeln mit unterschiedlichem Radius. Entsprechend der Gl. (4.25) bestimmen wir für den Kugelkondensator das Potential nach

$$U = \Phi(r_1) - \Phi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (4.29)$$

wobei das Feld des Kondensators außerhalb der äußeren Schale natürlich verschwindet. Die Kapazität wird mit der Grundformel $C = Q/U$ dann zu

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (4.30)$$

4.3.3 Feldstärke und Ladungsdichte

Nach Gl. (3.35) ist die Feldstärke proportional der Ladungsdichte, die selbst wieder umgekehrt proportional der Fläche ist, auf der sich die Ladung verteilt. Daher stehen die Felder zweier gleich hoch geladener Kugeln im Verhältnis

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q/r_1^2}{Q/r_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (4.31)$$

An einer Nadelspitze muß gleiches Potential herrschen wie am Nadelschaft (die gesamte Nadeloberfläche, sofern sie aus Metall und nicht wie bei den alten Germanen aus den Splittern von Knochen besteht, ist eine Äquipotentialfläche). Das Potential

¹frei übersetzt: Nichtleiter, eigentlich hat das griechische Präfix die Bedeutung von „durch“, da die Feldlinien durch das Medium gehen — im Unterschied zu Metallen mit frei beweglichen Elektronen.

²im Laborslang: DK, oft auch ε_R für „relativ“.

hängt aber nur linear, nämlich mit $1/r$, vom (Krümmungs-)Radius ab, die Feldstärke ist jedoch nach Gl. (4.21) proportional der Ladungsdichte, also von $1/r^2$:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.32)$$

Um das semiquantitativ zu bestimmen, stellen wir uns zwei Kugeln stark unterschiedlichen Radius vor, die durch einen Draht miteinander verbunden sind, so daß sie gleiches Potential aufweisen (Abb. 4.7):

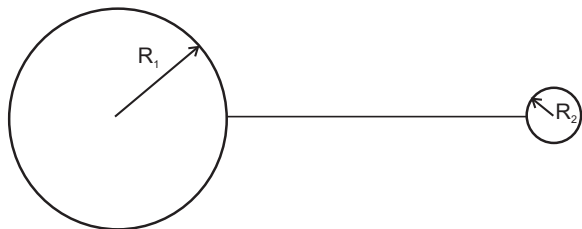


Abb. 4.7. Eine Nadel wird approximiert durch zwei Kugeln mit bedeutend unterschiedlichem Radius, die durch einen Draht miteinander verbunden sind.

$$\Phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \wedge \Phi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (4.33)$$

Wg. $\Phi_1 = \Phi_2$ muß dann

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (4.34)$$

sein. Damit werden die Felder nach

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1/R_1^2}{Q_2/R_2^2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (4.35)$$

umgekehrt proportional den Radien; an der kleineren Kugel herrscht also die größere Feldstärke (Spitzenentladung ab der sog. Durchbruchfeldstärke möglich, s. Aufgaben zu Kap. 4 und 5).

4.4 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 4.1 Zeigen Sie die Identität der Gln.

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = \frac{r^3 - \frac{3}{2}zr2z}{r^6}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r^3} = \frac{-3zr2x}{2r^6}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} = \frac{-3zr2y}{2r^6}; \quad (3)$$

und daraus folgend:

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = -\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}, \quad (4)$$

Lösung.

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = \frac{r^3 - \frac{3}{2}zr2z}{r^6}. \quad (1)$$

Wir benötigen noch die Kugelgleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial r^3}{\partial z} = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = 3z^2 r. \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = \frac{r^3 - 3z^2 r}{r^6} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}. \quad (7)$$

Nach Vor. ist

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r}, \quad (8)$$

folglich

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = \frac{1}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \vartheta). \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r^3} = \frac{-3zr2x}{2r^6}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} = \frac{-3zr2y}{2r^6}; \quad (3)$$

sind äquivalent zu behandeln:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r^3} = \frac{0 \cdot r^3 - z \cdot \frac{3}{2}r2x}{r^6} = \frac{-3z \cdot x}{r^5}. \quad (10)$$

Aufgabe 4.2 Zwischen zwei Kondensatorplatten liegt eine Spannung von 100 V, ihr Abstand ist 5 cm, eine Platte ist geerdet. Bestimmen Sie den Potentialverlauf und geben Sie das elektrische Feld an.

Lösung.

$$E = 20 \text{ V/cm}; \Phi(x) = 100 \text{ V} - 20 \text{ V/cm} \cdot x. \quad (1)$$

Aufgabe 4.3 Zwischen zwei Kondensatorplatten liegt eine Spannung von 100 V. Anschließend bringt man in den Zwischenraum Hartgummi ($\varepsilon_r = 2$).

1. Wie ändern sich Kapazität und Ladung, wenn die Spannungsquelle angeschlossen bleibt?
2. Wie ändern sich Spannung und Feldstärke, wenn die Platten nach dem Aufladen isoliert werden?

Lösung.

$$C_{\text{nach}} = 2C_{\text{vor}}. \quad (1)$$

$$Q = CU \Rightarrow Q_{\text{nach}} = 2Q_{\text{vor}}. \quad (2)$$

$$U = \frac{Q}{C} \Rightarrow U_{\text{nach}} = \frac{1}{2}U_{\text{vor}}. \quad (3)$$

$$E_{\text{nach}} = \frac{1}{2}E_{\text{vor}}. \quad (4)$$

Aufgabe 4.4 Berechnen Sie die Kapazität eines Kugelkondensators ($R_1 = 10,0$ cm, $R_2 = 10,1$ cm)!

Lösung. $C = \frac{Q}{U}$. Wir benötigen die Ladung und die Spannung. Die Ladung ergibt sich aus der POISSON-Gleichung, und das elektrische Feld ist wg. der Kugelsymmetrie

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (1)$$

Die zwischen Innen- und Außenseite sich aufbauende Spannungsdifferenz ist das Linienintegral

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

Damit wird C

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 1,12 \text{ nF}. \quad (3)$$

Grenzfälle:

1. Wird der Radius der Außenhaut unendlich, erhalten wir die Kapazität einer Kugel:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_1. \quad (4)$$

2. Wird dagegen $R_1 \approx R_2 \wedge R_2 - R_1 = d$, ergibt sich die Kapazität des Plattenkondensators

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{d} = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (5)$$

Aufgabe 4.5 Wie lang müssen zwei 5 cm breite Stanniolstreifen (Streifen aus Zinnblech) sein, wenn sie einen Kondensator von 10 μF bilden sollen und durch Papier einer Dicke von 50 μm (relative DK $\epsilon_R = 2$) getrennt sind?

Lösung.

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0\epsilon_r} = 28,25 \text{ m}^2. \quad (1)$$

$$l = \frac{28,25}{0,05} = 565 \text{ m}. \quad (2)$$

Aufgabe 4.6 Eine Leidener Flasche besteht aus einer Glas einer bestimmten Wandstärke, auf die auf Außen- und Innenseite zwei Stanniolfolien geklebt werden. Wenn die Flasche einen mittleren Durchmesser von 5 cm, eine Wandstärke von 3 mm und eine relative DK von 6 hat und auf der Grundfläche ganz und an den Seiten 25 cm hoch mit Stanniolblech belegt ist: welche Ladung nimmt sie bei 50 kV auf?

Lösung.

$$A = \left(\frac{\pi 5^2}{4} + \pi \cdot 5 \cdot 25\right) = 412,33 \text{ cm}^2. \quad (1)$$

$$C = \epsilon_0\epsilon_r \frac{A}{d} = 219 \text{ pF}. \quad (2)$$

$$Q = 219 \cdot 50 \mu\text{Coul} = 10,95 \text{ mCoul}. \quad (3)$$

Aufgabe 4.7 Betrachten Sie einen Plattenkondensator (Plattenfläche A , Abstand d , Spannung U), zwischen den eine Metallplatte der Stärke l eingeführt wird. Was ändert sich? Kapazität, Ladung, Spannung?

Lösung. Die Kapazität ist

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad (1)$$

und die Spannung

$$U = \frac{Q}{C} = \int E \cdot ds = E d. \quad (2)$$

Beim Einbringen einer Metallplatte der Dicke l , beginnend bei l_1 und endend bei l_2 , werden die Feldlinien beim Ein- bzw. Austritt unterbrochen, innerhalb der Platte ist die Feldstärke aber Null. Folglich ändert sich zwar nicht die Ladung auf den Platten des Kondensators, wohl aber die Spannung nach

$$U' = \int_0^{l_1} E \cdot ds + \int_{l_2}^d E \cdot ds = E(d - l). \quad (3)$$

Damit wird die Kapazität

$$C' = \varepsilon_0 \frac{A}{d - l}. \quad (4)$$

Aufgabe 4.8 Bestimmen Sie die Kraft eines homogenen und eines inhomogenen elektrischen Feldes auf einen Dipol!

Lösung. Homogenes Feld:

$$\vec{F} = -\nabla U = \text{const} \Rightarrow \frac{d}{dx} = 0. \quad (1)$$

$$\vec{F}_1 = q_1 \vec{E} \quad \wedge \quad \vec{F}_2 = q_2 \vec{E} = -q_1 \vec{E}. \quad (2)$$

Die Kräfte sind entgegengesetzt gleich. Es ergibt sich keine Kraft auf den Dipol, aber u. U. ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (3)$$

das solange wirkt, bis der Dipol in Feldrichtung ausgerichtet ist. Die dabei geleistete Arbeit ist

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \mu E \cos \theta. \quad (4)$$

Dagegen ist im inhomogenen Feld, z. B. dem linear ansteigenden Feld über einer Kathode einer elektrischen Entladung

$$\vec{F} = -\nabla W = \frac{d}{dx} \mu \cos \theta. \quad (5)$$

Also erfahren die beiden Partiaalladungen je nach Lage eine unterschiedliche Kraft, so daß auf den Dipol nach Gl.(5) eine endliche Gesamtkraft wirkt.

Aufgabe 4.9 1. Bestimmen Sie das Dipolmoment, das zwischen einem Ionenpaar in einem Steinsalzkrystall entsteht, wenn an diesen ein statisches elektrisches Feld von 10^8 V/cm gelegt wird.

2. Wie groß ist die Verschiebung der beiden Ladungsschwerpunkte gegeneinander?
3. In einem gepulsten Laser erreichen die Feldstärken Werte von typisch 10^9 V/cm. Wie groß ist die Verschiebung hier?

Gegeben sind die Dichte $\rho = 2,17$ g/cm³, die (statische) DK $\varepsilon = 5,9$, der Brechungsindex für sichtbares Licht $n_{\text{VIS}} = 1,54$; die Molmasse von NaCl ist $m_{\text{Mol}} = 58,4$ g/Mol. Gehen Sie von der Gleichung von CLAUSIUS und MOSOTTI für die (statische) Polarisierbarkeit aus, die für niedrige Frequenzen gilt, und verwenden Sie für niedrige Frequenzen die statische DK, die aus der Verschiebung von Ionen und Elektronen resultiert, für hohe Frequenzen dagegen die MAXWELL-Relation.

Lösung.

1. Mit der Gl. von CLAUSIUS und MOSOTTI

$$\alpha = \frac{3 \varepsilon - 1}{n \varepsilon + 2} \quad (1)$$

erhalten wir mit der Teilchenzahldichte der Ionenpaare aus

$$n = \frac{N_A \rho}{m_{\text{Mol}}} \quad (2)$$

einen Wert von $\alpha = 8,3 \cdot 10^{-35}$ cm³. Bei hohen Frequenzen sind nur die Verschiebungen der Elektronen relevant, und wir erhalten aus $\varepsilon = n^2$ einen Wert von nur mehr $\alpha = 4,2 \cdot 10^{-35}$ cm³.

2. Wir starten nun mit der Dielektrischen Funktion

$$\varepsilon = 1 + \chi, \quad (3)$$

womit die Polarisation im statischen elektrischen Feld

$$P = n \quad = \chi(0) \varepsilon_0 E \quad (4)$$

berechnet werden kann, wenn n die Teilchenzahldichte und \quad das Dipolmoment der Teilchen (hier der Ionenpaare) ist. $\chi(0)$ ist die Suszeptibilität.

$$P = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E, \quad (5)$$

und das Dipolmoment wird dann $\mu = P/n = 1,94 \cdot 10^{-31}$ C cm, womit die Ladungsschwerpunkte gegeneinander um $d = \mu/l = 1,2 \cdot 10^{-12}$ cm gegeneinander verschoben werden.

3. Entsprechend im Feld eines Lasers mit $P = (n^2 - 1) \varepsilon_0 E$

$\mu = 5,43 \cdot 10^{-29}$ C cm und $d = 3,4 \cdot 10^{-10}$ cm.

Aufgabe 4.10 Bestimmen Sie die Aufladekurve eines Kondensators in einem Stromkreis mit Spannungsquelle U_0 und OHMSchem Widerstand R , und zwar

1. die auf dem Kondensator gespeicherte Ladung,
2. die über dem Kondensator sich ändernde Spannung,
3. die über dem Widerstand sich ändernde Spannung,
4. die Stromstärke in dem Stromkreis.

Lösung. Wir gehen aus vom 2. KIRCHHOFFSchen Gesetz

$$U_0 + U_R(t) + U_C(t) = 0, \quad (1)$$

wobei die drei Anteile gegeneinander gerechnet werden:

$$-U_0 = U_R(t) + U_C(t), \quad (2)$$

und $U(R) = RI = R \frac{dQ}{dt}$ sowie $U_C = \frac{Q}{C}$ sind, so daß wir schreiben können:

$$-\frac{U_0}{R} = \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC}. \quad (3)$$

Diese inhomogene DGL wird durch *Variablenseparation* gelöst:

$$-\frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC} = \frac{dQ}{dt}, \quad (4)$$

oder nach Ausklammern von R

$$-\frac{1}{R} \left(U_0 + \frac{Q}{C} \right) = \frac{dQ}{dt} \quad (5)$$

und weiterer Umformung

$$-\frac{dt}{R} = \frac{dQ}{U_0 + \frac{Q}{C}}. \quad (6)$$

Erweitern mit C ergibt

$$-\frac{dt}{R} = \frac{CdQ}{CU_0 + Q} \Rightarrow -\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{CU_0 + Q}. \quad (7)$$

Die Integration liefert

$$-\frac{t}{RC} = \ln(CU_0 + Q) + \text{const.} \quad (8)$$

Wir ermitteln die Konstante für $t = 0$ zu $Q = 0$ auf dem Kondensator, so daß die Konstante $-\ln CU_0$ beträgt:

$$-\frac{t}{RC} = \ln(CU_0 + Q) - \ln CU_0 = \ln \frac{CU_0 + Q}{CU_0}. \quad (9)$$

Delogarithmieren liefert

$$e^{-\frac{t}{RC}} = 1 + \frac{Q}{CU_0}, \quad (10)$$

woraus wir die Zielgleichung

$$Q(t) = CU_0 e^{-\frac{t}{RC}} - CU_0 \quad (11)$$

gewinnen. Mit $Q_0 = -CU_0$ ist dann

$$Q(t) = Q_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (12)$$

Der Zusammenhang zwischen der während des Aufladevorgangs über dem Kondensator abfallenden Spannung und der Ladung ist über

$$Q_C(t) = CU_C(t) \quad (13)$$

gegeben, so daß hierfür aus Gl. (12)

$$U(t) = -U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (14)$$

gilt. Die Ableitung aus (12) ergibt den Strom im Stromkreis zu

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (15)$$

was mit $Q_0 = -CU_0 = -CRI_0$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (16)$$

ergibt, entsprechend dem OHMSchen Gesetz der Spannungsabfall über dem Widerstand zu

$$U_R(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (17)$$

5 Elektrostatische Energie

5.1 Einzelne Ladungen

Die elektrostatische Energie zweier Punktladungen ist gegeben durch

$$E = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (5.1)$$

Wegen des Superpositionsprinzips gilt für ein Ensemble von Ladungen entsprechend

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, \quad (5.2)$$

wobei die i, j alle möglichen Paare darstellen, also eine Doppelsumme bilden. Jedes Paar darf dabei natürlich nur einmal gezählt werden.

5.2 Homogen verteilte Ladungen

In homogen verteilten Ladungen ist eine Ladungsdichte definierbar. Beispielsweise ist für eine Kugel die in derselben gespeicherte Ladung

$$Q = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho, \quad (5.3)$$

und in dem entsprechenden Volumenelement zwischen r und $r + dr$ $dV = 4\pi r^2 dr$

$$dQ_r = \rho 4\pi r^2 dr. \quad (5.4)$$

Beginnen wir mit einer Kugel der Ladungsdichte ρ und des Radius r , die insgesamt eine Ladung Q enthält, und bauen zwiebelartig um diese Punktladung weitere Ebenen mit der Ladungsdichte ρ und den Radien zwischen r und $r + dr$ herum, so wird die Gesamtenergie nach Gln. (5.3) und (5.4)

$$dE = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} dQ_r = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 \rho \cdot 4\pi r^2 \rho}{4\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{4\pi \rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr. \quad (5.5)$$

Soll der Außenradius der neuen Kugel bis a gehen, so wird

$$E = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}, \quad (5.6.1)$$

was bei Rücksubstitution nach Q

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q^2}{5a} \quad (5.6.2)$$

ergibt: Die Energie einer homogen geladenen Kugel ist proportional dem Quadrat der Ladungen und umgekehrt proportional dem Radius.

5.3 Kondensator

Die Energie eines Kondensators kann nach dem Superpositionsprinzip einfach bestimmt werden. Wird die Ladung q von einer Platte auf die andere gebracht, ist die Potentialdifferenz (mit C der Kapazität des Kondensators)

$$U = \frac{Q}{C}, \quad (5.7)$$

und damit die Arbeit

$$dW = U dQ = \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2. \quad (5.8.1)$$

Setzen wir dafür die Gleichung für die Kapazität [Gl. (4.28)] und die Feldstärke $U = dE$ ein, erhalten wir

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_R E^2 \cdot (A \cdot d) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_R E^2 \cdot V, \quad (5.8.2)$$

wobei wir die Größe W/V als Energiedichte bezeichnen. Sie erhält oft das Symbol u :

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_R E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E \quad (5.9)$$

mit D der sog. Verschiebungsdichte

$$= \varepsilon_0 \cdot \quad (5.10)$$

Zwar sind die Vektoren D und E oft gleichgerichtet, z. B. im Vakuum oder einfachen Dielektrika, manchmal allerdings weist die relative DK die Eigenschaften eines Tensors auf. D beschreibt die Wirkung des Feldes, z. B. auf Probeladungen. E dagegen hängt mit der Größe der felderzeugenden Ladungen zusammen, also mit der Ursache des Feldes.

5.4 Energie des elektrostatischen Feldes

Für homogen verteilte Ladungen gilt statt Gl. (5.2)

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, \quad (5.2)$$

$$E = \frac{1}{2} \int_V \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} d^3x_1 d^3x_2. \quad (5.11)$$

5.5 Entladung eines Kondensators

Entlade sich ein Kondensator der Kapazität C über einen Widerstand R , so gelten die beiden Gleichungen

$$Q(t) = C \cdot U(t) \wedge U(t) = R \cdot I(t) \Rightarrow Q(t) = C \cdot R \cdot I(t). \quad (5.12)$$

Dabei ist die vom Kondensator in der Zeiteinheit abfließende Ladung gleich dem durch den Widerstand fließenden Strom:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt}, \quad (5.13)$$

so daß sich als DGl

$$d \ln Q = -\frac{1}{CR} dt \quad (5.14)$$

ergibt, die als Lösung

$$\ln Q(t) - \ln Q(t_0) = -\frac{1}{CR} \cdot (t - t_0) \quad (5.15)$$

hat. Setzt man als Integrationskonstante für die Ladung Q zum Zeitpunkt $t = t_0 = Q_0$, wird

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{CR} \cdot (t-t_0)}, \quad (5.16)$$

was mit $t_0 = 0$ sich vereinfacht zu

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{CR} \cdot t}. \quad (5.17)$$

Für die Spannung am Kondensator gilt dann analog (s. Abbn. 5.1):

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{1}{CR} \cdot t}, \quad (5.18)$$

und bei der Aufladung eines Kondensators wird entsprechend dieser DGl der Endwert asymptotisch erreicht.

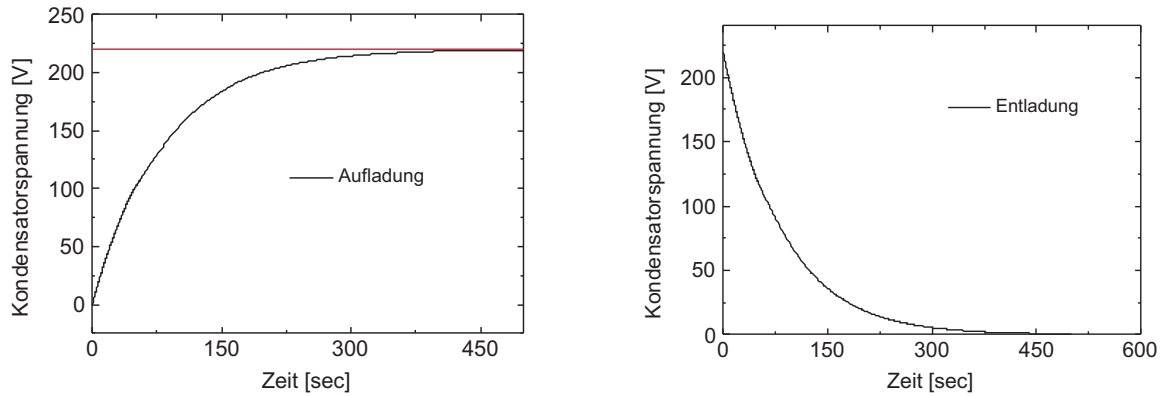


Abb. 5.1. Auf- und Entladung eines Kondensators $C = 40\mu\text{F}$ über einen seriell geschalteten Widerstand $R = 2\text{ M}\Omega$.

5.6 Polarisation

Verringern sich durch das Einbringen eines Dielektrikums der DK ε in das homogene Feld eines Plattenkondensators (Fläche A) Spannung und Feld um $1/\varepsilon$, muß das nach dem GAUSSschen Satz $\Phi = EA$ auch für die Ladungen gelten. Da sich an den Platten aber nichts geändert hat, muß die Kompensation durch Ladungen verursacht werden, die auf den zu den Kondensatorplatten gerichteten Oberflächen durch Influenz entstehen:

$$E_0 = \frac{U_0}{d} \longrightarrow U_{\text{mit}} = \frac{U_0}{\varepsilon} \wedge E_{\text{mit}} = \frac{E_0}{\varepsilon} \Rightarrow Q_{\text{mit}} = \frac{Q_0}{\varepsilon}. \quad (5.19)$$

Damit folgt für die Ladungen auf den Platten des Dielektrikums

$$Q_D = Q_0 - Q_{\text{mit}} = Q_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = Q_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \quad (5.20)$$

Der durch die Ladung erzeugte Fluß

$$F = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (5.21)$$

erzeugt eine Feldstärke von

$$E = \frac{F}{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}, \quad (5.22)$$

womit mit Gl. (5.20)

$$Q_D = \varepsilon_0 E_0 A \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \quad (5.23)$$

wird. Damit wird auf der Länge dl zwischen Kondensatorplatte und Platte des Dielektrikums ein Dipolmoment der Stärke

$$d\mu = Q_D dl = \varepsilon_0 E_0 A \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} dl = \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} dV \quad (5.24.1)$$

erzeugt, wobei \mathbf{d} und \mathbf{E} in die gleiche Richtung zeigen:

$$\mathbf{d} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathbf{E} dV. \quad (5.24.2)$$

Unter dem auf das Volumen reduzierten Dipolmoment verstehen wir die Polarisation (= Ladungsverschiebung)

$$\mathbf{P} = \frac{d}{dV} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.25.1)$$

bzw. mit dem im Dielektrikum geschwächten Feld

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (5.25.2)$$

Der \mathbf{P} und \mathbf{E} verbindende Materialfaktor wird als *dielektrische Suszeptibilität* χ bezeichnet. Erweitert man die Definition der Verschiebungsdichte im Medium (Gl. (5.9) zu

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (5.26)$$

wird daraus

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (5.27)$$

bzw. für das Verhältnis von Polarisation und elektrischer Feldstärke:

$$\frac{P}{\varepsilon_0 E} = \varepsilon - 1. \quad (5.28)$$

5.6.1 Polarisierbarkeit eines Gases

Aus den Gln. (5.25) geht hervor, daß die Feldstärke im Kondensator durch das Dielektrikum auf den $1/\varepsilon$ ten Teil verringert wird; sie entspricht also einem dem erzeugenden Feld entgegengesetzt gerichteten induzierten elektrischen Moment und ist für ein Gas der Teilchenzahldichte $n = N/V$ definiert als

$$\mathbf{P} = \frac{N}{V} \mu_{\text{ind}} = n \mu_{\text{ind}} = n \alpha \mathbf{E}, \quad (5.29)$$

wenn das induzierte Dipolmoment parallel dem angelegten elektrischen Feld ist. Da das Molvolumen $M/\rho = V_M$ beträgt und N_A Moleküle enthält, ist

$$n = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{N_A \rho}{M}, \quad (5.30)$$

also wird durch Gleichsetzen von (5.25) mit (5.29)

$$\alpha = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{n} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \frac{M}{N_A \rho}. \quad (5.31)$$

Diese Beziehung hat sich zur Bestimmung der Polarisierbarkeit von Gasen gut bewährt.

Die Herleitung zur Gl.(5.31) geht auf die Struktur der Materie nicht ein. Sie ist rein phänomenologisch, beschreibt also nur quantitativ den Sachverhalt. Im folgenden werden wir die verschiedenen Arten der Polarisation untersuchen.

5.6.2 Elektronische Polarisation

Alle Bestandteile einer Molekel werden durch ein elektrisches Feld beeinflusst. Bei sehr hohen Frequenzen sind nur noch die Elektronen in der Lage, den Oszillationen des Feldes zu folgen. Man sagt, daß sie nahezu *trägeitslos* sind. Die Gleichung für die erzwungene Schwingung lautet

$$m_e \ddot{x} + D \dot{x} - q_e E_0 e^{i\omega t} = 0. \quad (5.32)$$

Setzt man für die Kreisfrequenz ω_0 des ungestörten Systems den Wert $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m_e}}$ ein, wird

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - q_e \frac{E_0}{m_e} e^{i\omega t} = 0. \quad (5.33)$$

Im eingeschwungenen Zustand wird mit dem Ansatz $x = x_0 e^{i\omega t}$

$$x (\omega_0^2 - \omega^2) - q_e \frac{E_0}{m_e} = 0, \quad (5.34)$$

und für die Amplitude x_0 dieser Schwingung folgt aus (5.34)

$$x = q_e \frac{E_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.35)$$

Nach der Gl. (5.35) wird die Amplitude unendlich für den Fall, daß die Störfrequenz gleich der Eigenfrequenz ω_0 ist: *Resonanz*. Betrachten wir zunächst den Fall sehr viel niedrigerer Störfrequenzen, so daß wir den Subtrahenden im Nenner vernachlässigen können:

$$x \approx q_e \frac{E_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (5.36)$$

und das Dipolmoment ist

$$\mu = q_e x = q_e^2 \frac{E_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (5.37)$$

also ebenfalls proportional dem elektrischen Feld. Mit Gl. (5.29) wird dann

$$\alpha = \frac{\mu_{\text{ind}}}{E} = \frac{q_e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (5.38)$$

bzw. für N Molekeln ergibt sich die gesamte Polarisation bzw. mit Gl. (5.28) für die Dielektrizitätskonstante

$$N\alpha = \frac{N\mu_{\text{ind}}}{E} = \varepsilon - 1 = \frac{Nq_e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2} : \quad (5.39)$$

die Polarisierbarkeit (Dielektrizitätskonstante) ist proportional der Gasdichte und der Eigenfrequenz eines elektronischen Übergangs. Für Gase stimmt das gut. Bei höherer Dichte werden die Abweichungen spürbar, die durch die Wechselwirkung der Dipole verursacht werden. CLAUSIUS und MOSOTTI erhielten nach längerer Rechnung die nach ihnen benannte Gleichung

$$N\alpha = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\mu}{\rho}, \quad (5.40)$$

die für die Gasnäherung $\varepsilon \approx 1$ in die Gl. (5.39) übergeht.

5.6.3 Orientierungspolarisation

Für permanente Dipole sind weitere Komplikationen zu erwarten. Ausrichtung in einem elektrischen Feld durch ein Drehmoment

$$= \quad \times \quad (5.41)$$

ergibt eine energieärmere Minimal- und eine energiereichere Maximalposition (U für die Innere Energie):

$$dU = - \cos \vartheta \quad , \quad (5.42.1)$$

was man skalar

$$dU = -\mu E d(\cos \vartheta) \quad (5.42.2)$$

schreiben kann. U soll minimal werden. Gestört wird diese Einstellung durch die chaotische Wärmebewegung. Es ist also das mittlere Dipolmoment $\langle \mu \rangle$ zu ermitteln. Dazu benötigen wir die Orientierungswahrscheinlichkeit dW über das Winkelement in Kugelkoordinaten $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$:

$$\langle \mu \rangle = N \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mu \exp -\frac{U}{k_B T} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (5.43)$$

Das ergibt nach längerer Algebra die sog. LANGEVIN-Funktion, die zum ersten Mal für magnetische Dipole abgeleitet wurde:

$$\langle \mu \rangle = \mu \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} - \frac{1}{\alpha} \quad (5.44)$$

mit $\alpha = \frac{\mu E}{k_B T}$. Da bei Zimmertemperatur $\alpha \gg k_B T$, kann man den \coth entwickeln und erhält

$$\coth \alpha = \frac{1}{\tanh \alpha} \approx \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 - \alpha^2/3}. \quad (5.45)$$

Einsetzen in die LANGEVIN-Funktion ergibt

$$\langle \mu \rangle = \frac{\alpha}{3} \mu = \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{k_B T} E. \quad (5.46)$$

Vergleicht man mit $\mu_{\text{ind}} = \alpha E$ [Gln. (5.38) – (5.40)], zeigt sich, daß zur Berechnung der Orientierungspolarisation statt $\alpha \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{k_B T}$ zu setzen ist, und die Gesamtpolarisation ergibt sich zu

$$P = \frac{4\pi}{3} N_A \left(\alpha + \frac{\mu^2}{3k_B T} \right) = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\mu}{\rho}, \quad (5.47)$$

der sog. DEBYE-Gleichung. Sie sollte eine lineare Funktion sein, wenn man die Gesamtpolarisation gegen $1/T$ aufträgt. Aus dem Ordinatenabschnitt bekommt man die Polarisierbarkeit. ε wird mit Wechselfeldern gemessen. Je nachdem, wann welche Molekülbausteine dem steigenden Feld nicht mehr folgen, nimmt die DK zu hohen Frequenzen hin ab. Vernachlässigung der Orientierungspolarisation in Gl. (5.47) und Ersatz von ε durch n^2 (MAXWELLSche Relation) liefert die sog. Molrefraktion.

Die Schwächung des elektrischen Feldes zwischen Ionen in einem Elektrolyten ist in Wasser mit seiner hohen DK von 81 verantwortlich für die exzellenten Solvatationseigenschaften des Wassers.

5.7 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 5.1 Welche Kraft und welche potentielle Energie herrschen zwischen zwei Elementarladungen im Abstand $a = 1 \text{ nm} (= 10 \text{ \AA})$ im Vakuum und in Wasser ($\varepsilon_r = 1$ bzw. 81)? Vergleichen Sie die Werte mit der thermischen Energie bei RT!

Lösung. Wenn a in \AA angeschrieben wird, gilt

$$F = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\varepsilon_r a^2} \text{ N}, \quad (1)$$

$$W = \frac{2,4 \cdot 10^{-18}}{\varepsilon_r a} \text{ J} = \frac{14}{\varepsilon_r a} \text{ eV}. \quad (2)$$

Die thermische Energie ($E = k_B T$) ist bei RT etwa $1/40 \text{ eV}$. Damit wird $W = k_B T$ für $a = 570 \text{ \AA}$ in Luft, für $a = 7 \text{ \AA}$ in Wasser. Zwei Ionen, deren Abstand kleiner ist als dieser kritische, bleiben also gebunden, bei größerem Abstand werden sie durch die thermische Bewegung getrennt. Daher können starke Elektrolyte im Wasser dissoziieren.

Aufgabe 5.2 Durchbruchfeldstärke und elektrische Arbeit.

1. Wie groß muß der Radius einer Kugel, welche die Ladung $Q = 10^{-8}$ Coul trägt, mindestens sein, damit auf ihrer Oberfläche die Durchbruchfeldstärke in Luft ($25 \cdot 10^6$ V/m) nicht überschritten wird?
2. Welche Arbeit muß man aufwenden, um ihr einen kleinen Körper gleicher Ladung von 10 m Abstand auf 1 m zu nähern?

Lösung.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{E}} = 6 \text{ mm.} \quad (1)$$

$$W = \int F ds = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2}. \quad (2)$$

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (3)$$

$$W = 0,81 \mu\text{J.} \quad (4)$$

Aufgabe 5.3 In Zimmerluft tritt oberhalb einer Feldstärke von $2,5 \cdot 10^4$ V/cm Funkenüberschlag ein.

- Welche Energiedichte kann deshalb ein elektrisches Feld in Luft höchstens haben?
- Welche Spannung kann man daher an einen Plattenkondensator mit 1 mm Luftzwischenraum höchstens anlegen?

Lösung.

$$\rho = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_R E^2 = 27,66 \text{ J/m}^3. \quad (1)$$

$$U = E d = 2,5 \text{ kV.} \quad (2)$$

Aufgabe 5.4 Sie entladen einen Kondensator der Kapazität C über den Widerstand R , so daß immer $Q(t) = C \cdot U(t)$ und $U(t) = R \cdot I(t)$ gelten. Zu welcher Zeit sind Kondensatorspannung und -ladung auf die Hälfte gesunken? Zeigen Sie, daß diese Zeit (sog. *Halbwertszeit*) von der anfangs gespeicherten Ladung Q_0 unabhängig ist. Wie groß ist dann U nach der drei- und vierfachen (Halbwerts-)Zeit?

Lösung.

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/CR} \wedge U(t) = U_0 e^{-t/CR}. \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} = e^{-t/CR} \Rightarrow \ln 2 = \frac{t}{CR} \Rightarrow t_{1/2} = CR \ln 2. \quad (2)$$

Sei $t = 3t_{1/2}$ bzw. $t = 4t_{1/2}$, dann ist die dann am Widerstand anliegende Spannung

$$U(t) = U_0 e^{-3 \cdot \ln 2} = U_0 e^{-2,079} = 0,125 U_0. \quad (3)$$

$$U(t) = U_0 e^{-4 \cdot \ln 2} = U_0 e^{-2,773} = 0,062 U_0. \quad (4)$$

Aufgabe 5.5 Um die Kraft zu bestimmen, mit der sich die Platten eines isolierten Plattenkondensators anziehen (Fläche A , Abstand d , Spannung U), bestimme man zunächst den Energieinhalt des elektrischen Feldes und daraus die Kraft.

Lösung. Energiedichte ohne Materie:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (1)$$

Damit die gespeicherte Arbeit:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 A d = \quad (2)$$

Also ist die Kraft

$$F = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 A = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 A \frac{U^2}{d}. \quad (3)$$

Aufgabe 5.6 Die Leitung vom Kraftwerk ($U_0 = 220$ kV) zur Umspannstation (220 V) sei 100 km lang.

- Wie dick muß der Alu-Draht sein, damit der Spannungsverlust durch JOULEsche Wärme, der durch einen Stromfluß von $I = 500$ A verursacht wird, gerade noch bei 1 % liegt ($\sigma_{\text{Al}} = 3,8 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$)? Wie groß ist dennoch der Spannungsabfall? Bestimmen Sie zunächst die abgegebene Leistung, dann daraus den (maximalen) Widerstand mittels des OHMSchen Gesetzes, dann damit die Querschnittsfläche!

$$P = UI = 110 \cdot 10^6 \text{ W} \quad (1)$$

$$\Delta U = RI \Rightarrow R = \frac{\Delta U}{I} = \Delta U \cdot \frac{U}{P} = 4,4 \Omega. \quad (2)$$

$$R = \frac{lA}{\sigma} \Rightarrow A = \frac{l}{R\sigma} \Rightarrow A = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ m}}{4,4 \cdot 3,8 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}} = 6 \text{ cm}^2. \quad (3)$$

- Wie groß müßte der Querschnitt bei 220 V und gleicher abgegebener Leistung sein (die Stromstärke muß entsprechend erhöht werden!)?

$$I = \frac{P}{U} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ A}. \quad (4)$$

$$R = 4,4 \cdot 10^{-6} \Omega. \quad (5)$$

$$A = 600 \text{ m}^2. \quad (6)$$

- In welchem Radius um den Draht ist das Feld größer als die Durchbruchsspannung der Luft ($U = 2,5 \cdot 10^4$ V/cm, Höhe über dem Erdboden: $h = 20$ m, $E = U_0/[r \ln(h/r_0)]$)?

$$A = \pi r_0^2 \Rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 1,38 \text{ cm}. \quad (7)$$

$$E = \frac{U_0}{r \ln h/r_0} = \frac{220 \cdot 10^3 \text{ V}}{r \ln 20/0,0138 \text{ m}}. \quad (8)$$

Für $E = 2,5 \cdot 10^4$ V/cm ergibt sich dann ein r von

$$r = 11,6 \text{ mm}. \quad (9)$$

- Wenn die minimale Höhe zwischen den Masten noch 20 m beträgt: wie hoch ist die Feldstärke am Boden?

$$E = \frac{U_0}{r \ln(h/r_0)} = \frac{220 \cdot 10^3 \text{ V}}{20 \ln 20/0,0138 \text{ m}} = 1511 \text{ V/m}. \quad (10)$$

Aufgabe 5.7 Gewitter

- Bestimmen Sie die Kapazität einer Wolke mit 10 km^2 Fläche und einer Höhe von 1 km ($\epsilon_r = 1$):

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-8} \text{ F.} \quad (1)$$

- Bei einer Durchschlagfestigkeit von 10^3 V/cm über die große Weite: Wie hoch ist die maximale Spannung in der Vertikalen?

$$U = 10^5 \cdot 10^3 = 10^8 \text{ V.} \quad (2)$$

- Welche Ladung ist folglich in der Wolke gespeichert?

$$Q = CU = 8,85 \text{ Coul.} \quad (3)$$

- Bei 9 Blitzen, die jeweils 1 msec dauern: Wie hoch ist die Stromstärke eines einzelnen Blitzes?

$$I = 1000 \text{ A.} \quad (4)$$

- Wie groß ist die Leistung eines einzelnen Blitzes?

$$P = UI = 10^{11} \text{ W.} \quad (5)$$

- Wie hoch die verpuffte Energie des gesamten Gewitters in J und kWh?

$$W = Pt = 9 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^8 \text{ J} = 9 \cdot 10^5 \text{ kJ} = 250 \text{ kWh.} \quad (6)$$

6 Magnetostatik

6.1 Strom aus trockenen Zellen

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die Hauptquelle elektrischen Stroms die chemische Zelle, die einen Stromfluß auf Grund chemischer Reaktionen an getrennten Polen möglich macht. Eine endgültige Form wurde 1868 im sog. LECLANCHE-Element gefunden, das aus zwei Polen besteht: einem negativen Pol metallischen Zinks, dem als positiver Pol ein Kohlestift, der in Braunstein (MnO_2) eingebettet ist, gegenübersteht. Das Ganze steht in einer wäßrigen Lösung aus Ammoniumchlorid und Zinkchlorid, dem Stärke beigemischt ist, die die Lösung so zähflüssig macht, daß man sie umgangssprachlich als Trockenzellen bezeichnet.

Bei den zwei elektrochemischen Teilreaktionen



werden Elektronen frei bzw. verbraucht. Diese sind durch die Separation als getrennte Elektroden (Anode für die negativ geladenen Anionen, Kathode für die positiv geladenen Kationen) als Strom fühlbar. Die Potentialdifferenz für dieses Elektrodenpaar beträgt 1,5 V.

Durch Hintereinanderschalten gleicher Zellen kann die Potentialdifferenz erhöht werden. Der Strom mit dem Potential der ersten Zelle tritt in die zweite Zelle ein und wird dort erneut angehoben. Die Potentialdifferenz ist daher $2 \cdot 1,5 = 3$ V. Macht man das mehrfach, hat man so etwas wie eine Stellung aus mehreren Kanonen gebaut, eine *Batterie*.

Schaltet man die Zellen parallel, erhöht sich zwar nicht die Spannung, aber die Kapazität, wie man umgangssprachlich sagt. In Wirklichkeit ist es natürlich der Vorrat an Material, der eine längere Lebensdauer als mit einer einzelnen Zelle ermöglicht.

Beim Fluß von der Kathode zur Anode müssen die Elektronen den inneren Widerstand der Zelle überwinden. Bei größerer Stromforderung des Verbrauchers muß also auch mehr Strom durch die Zelle fließen.

6.2 Der elektrische Strom

6.2.1 Das Ohmsche Gesetz

Nachdem es so gelungen war, auf chemischem Wege aus einzelnen *chemischen Zellen* einen kontinuierlichen Stromfluß zu erzeugen, die zu einer Batterie zusammengeschaltet, bis dahin nie gesehene Stromstärken abgeben konnten, lag es nahe, den Zusammenhang zwischen Potentialdifferenz U und Stromstärke I zu untersuchen, der durch einen stromführenden Draht fließt. Die Messungen G.S. OHMS ergaben für viele Metalle bei gleicher Drahtgeometrie eine Proportionalität zwischen diesen Größen, abhängig allerdings vom Material selbst, und er formulierte 1826 sein Gesetz

$$U = R I \quad (6.2)$$

mit R dem sog. Widerstand, der in Ohm gemessen wird und selbst wieder für einfache Metalle als aus zwei Faktoren bestehend betrachtet werden kann, einem Geometriefaktor, der sog. Zellkonstanten c , die das Verhältnis von Drahtlänge und Querschnittsfläche des Drahtes bezeichnet, und dem spezifischen, materialabhängigen, Widerstand, der den Buchstaben ϱ erhielt:

$$c = \frac{l}{A} \Rightarrow R = \varrho c. \quad (6.3)$$

Man beobachtet also nach Gl. (6.2) einen Spannungsabfall zwischen zwei Punkten, wenn ein konstanter Strom bekannter Stromstärke durch einen Draht bekannten Widerstandes fließt. Dieser Widerstand ist um so höher, je länger der Draht, und um so niedriger, je dicker der Draht ist. Je höher der spezifische Widerstand, um so geringer die elektrische Leitfähigkeit, die mit σ bezeichnet wird, und die einfach invers zueinander sind:

$$\sigma = \frac{1}{\varrho}. \quad (6.4)$$

Die höchsten Leitfähigkeiten weisen Silber und Kupfer auf; auch Aluminium ist vorne mit dabei, während Übergangsmetalle wie Titan den elektrischen Strom um fast zwei Größenordnungen schlechter leiten. Der spezifische Widerstand ist nicht konstant, sondern temperaturabhängig. Insgesamt hat die physikalische Größe „elektrische Leitfähigkeit“ eine sehr hohe Dynamik, wenn man darunter den Unterschied zwischen sehr gut und sehr schlecht versteht.

Wenn man sich den elektrischen Strom durch einen metallischen Leiter aus bewegten Ladungen vorstellt, die sich mehrheitlich in einer Richtung unter dem Einfluß einer Kraft mit einer bestimmten *Driftgeschwindigkeit* bewegen, und wir noch den Querschnitt des Leiters A vorgeben, durch den sich der Strom senkrecht hindurchbewegt, dann ist die Stromstärke

$$dI = \quad \cdot \quad dA, \quad (6.5.1)$$

wobei \mathbf{n} der auf dem Flächenelement senkrecht stehende Einheitsvektor ist und j die Stromdichte bezeichnet:

$$I = \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad (6.5.2)$$

sie ist die pro Zeiteinheit und durch das Flächenelement tretende Ladung Q . Insgesamt ist dann im Volumenelement

$$dV = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot dt \quad (6.6)$$

die Ladung

$$dQ = \rho dV = \rho \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot dt \quad (6.7)$$

enthalten mit ρ der Ladungsträgerdichte. Durch Vergleich mit Gln. (6.5) ergibt sich die wichtige Beziehung

$$\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v}. \quad (6.8)$$

6.3 Kontinuitätsgleichung

Der Strom ist die pro Zeiteinheit fließende Ladungsmenge, mit Gl. (6.7):

$$I = \frac{dQ}{dt} = \rho \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad (6.9.1)$$

aus der sich auch

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (6.9.2)$$

ergibt, und von Gl. (6.5.2) wissen wir, daß nach dem GAUSSschen Satz

$$I = \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (6.9.3)$$

Damit ist der Strom einer Ladungsdichte ρ , der pro Zeiteinheit das Volumenelement dV verläßt, entgegengesetzt gleich der Ergiebigkeit der Stromdichte:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho, \quad (6.10)$$

die sog. *Kontinuitätsgleichung* oder der Satz von der *Erhaltung der Ladung*.

6.4 Das differentielle Ohmsche Gesetz

Sei das Feld, das die Ladungen durch den elektrischen Leiter vorwärtstreibt, zeitlich konstant, und sei die Verteilung der Ladungsträger im Leiter räumlich homogen, so wissen wir mit Gl. (3.19), daß ein Zusammenhang der Art

$$-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right] = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (3.19)$$

zwischen Potentialdifferenz und elektrischem Feld besteht. Sei der Querschnitt A des Leiters konstant, so daß $jA = I$, dann können wir die Zellkonstante c in differentieller Form als $\frac{ds}{A}$ schreiben. Auf der anderen Seite des OHMSchen Gesetzes steht dann das Produkt von R und I , das mit den Gln. (6.3) geschrieben werden kann

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = \rho c I = \rho \int_a^b \frac{A}{A} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\sigma} \int_a^b \frac{A}{A} \cdot d\vec{s}, \quad (6.11)$$

so daß wir durch den Vergleich der Integranden die Gleichung

$$E = \sigma \rho \quad (6.12)$$

erhalten, das sog. differentielle OHMSche Gesetz.

6.5 Energie und Leistung elektrischer Ströme

Es ist die Arbeit beim Überführen einer Ladung Q

$$W = QU \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \dot{W} = I \cdot U = P, \quad (6.13)$$

wobei die Einheit der Leistung 1 Watt ist.

$$W = Q \cdot U = I \cdot t \cdot U = I^2 \cdot R \cdot t. \quad (6.14)$$

Nimmt in einem Leiter die Spannung auf Null ab, so ist der Energiebetrag $I \cdot t \cdot U$ in Wärmeenergie, die JOULEsche Wärme, umgewandelt worden.

6.6 Leistungsanpassung

Am Ende von Abschn. 6.1 wurde der Innenwiderstand R_i der Spannungsquellen erwähnt. Mit dem OHMSchen Gesetz können wir das nun quantitativ machen. Sei im stromlosen Fall (Verbrauchswiderstand ∞) die Quellenspannung U_0 , so sinkt sie bei Stromentnahme auf

$$U = U_0 - R_i I \quad (6.15)$$

ab. Die Strom-Spannungskennlinie fällt linear mit steigendem Strom ab; die Steigung ist der Innenwiderstand, der Achsenabschnitt ist U_0 (Abb. 6.1). Damit ist klar, daß

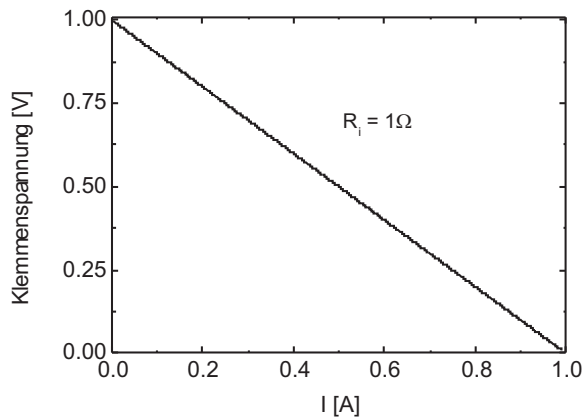


Abb. 6.1. Zieht ein Verbraucher aus einer Spannungsquelle Strom, so sinkt die Klemmenspannung linear mit steigendem Strom ab.

der maximal entnehmbare Strom auf U_0/R_i begrenzt ist, den sog. *Kurzschlußstrom* I_K , bei dem die Spannung vollständig zusammenbricht. Der maximale Strom, der für einen Verbraucher mit dem Widerstand R bereitgestellt werden kann, ist aber nochmals kleiner, nämlich

$$I_{\max} = \frac{U_0}{R_i + R}. \quad (6.16)$$

Damit ist die maximale Leistung

$$P = UI_{\max} = (U_0 - R_i I_{\max}) \frac{U_0}{R_i + R} = \frac{U_0^2}{R_i + R} \left(1 - \frac{R_i}{R_i + R}\right) \quad (6.17.1)$$

oder

$$P = \frac{R U_0^2}{(R_i + R)^2}. \quad (6.17.2)$$

Wir diskutieren zunächst die beiden Grenzfälle

- $R \ll R_i$:

$$P \approx \frac{R U_0^2}{R_i^2} : \quad (6.18.1)$$

Die Leistung ist sehr klein und steigt mit R ; die Quellenspannung ist nahezu vollständig eingebrochen, und

- $R \gg R_i$:

$$P \approx \frac{U_0^2}{R} : \quad (6.18.2)$$

Nun ist der Strom so klein, daß $P \propto 1/R$.

Aus Gl. (6.17.2) ergibt sich das Maximum bei $R = R_i$ (Abb. 6.2) und beträgt

$$P_{\max} = \frac{U_0^2}{4R_i}. \quad (6.19)$$

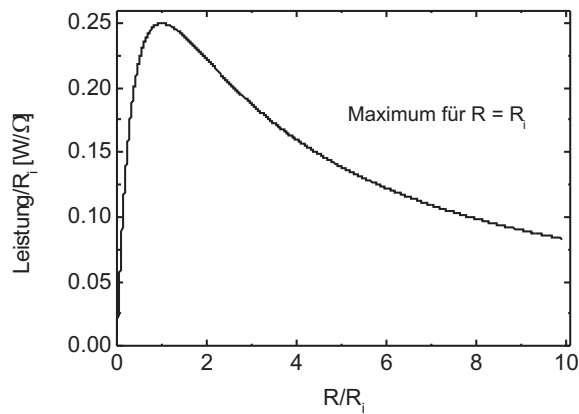


Abb. 6.2. Ein Verbraucher kann aus einer Spannungsquelle maximalen Leistung dann ziehen, wenn sein Widerstand gleich dem Innenwiderstand der Quelle ist.

6.6.1 Spannungsquelle und Stromquelle

Entnehmen wir also dem Netz mit konstanter Spannung von 230 V (Effektivwert) Leistung, dann nimmt diese mit sinkendem Widerstand nach $P = \frac{U^2}{R}$ zu. Hat man es dagegen mit einer Stromquelle (konstantem Strom) zu tun, dann wird an der Stelle mit höchstem R die höchste Leistung nach $P = RI^2$ verbraucht. Die Frage ist also, wann wird welche Gleichung verwendet?

6.6.1.1 Spannungsquelle. Eine ideale Spannungsquelle liefert unabhängig von der Verbraucherlast eine konstante Spannung. Ihr Innenwiderstand beträgt 0Ω , Quellen- und Klemmenspannung sind somit immer gleich. Gleichspannungsquellen sind Batterien, Akkus und Netzgeräte, Wechselspannungsquellen Generatoren, Trafos und Netzgeräte, vorzugsweise aber (noch) unser Energieversorgungsnetz — bis zur endgültigen Stilllegung durch Windmühlen und Solarzellen. Für die ideale Spannungsquelle ergibt die Gl. (6.19) damit die Möglichkeit einer unendlichen Leistungsentnahme.

6.6.1.2 Stromquelle. Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß die oben getroffene Begriffsbildung für reale Systeme in dieser Schärfe nicht gelten kann. Aus Gl. (6.15) wird so

$$I = \frac{U_0}{R_i} - \frac{U}{R_i} = I_K - \frac{U}{R_i}. \quad (6.20)$$

6.7 Magnetische Kraft auf einen Strom

Wir beginnen wieder mit der Definition der LORENTZ-Kraft, betrachten aber nun nur den Teil, der mit bewegten Ladungen zu tun hat (Abb. 6.3):

$$= q \times . \quad (6.21)$$

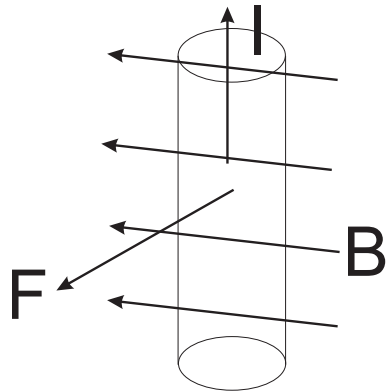


Abb. 6.3. Die Kraft auf einen Draht der (Einheits-)Länge l , durch den der Strom I fließt, ist im Magnetfeld der Stärke B gegeben durch $I \times B$.

Wenn in einem Volumen ΔV N solcher Ladungen enthalten sind, dann ist

$$\Delta = (N\Delta V)(q \times). \quad (6.22.1)$$

Da die Stromdichte $j = Nqv$, ist damit

$$\Delta = \times \Delta V : \quad (6.22.2)$$

die Kraft pro Einheitsvolumen ist \times . Ist der Strom über den Querschnitt homogen, können wir für ΔV

$$\Delta V = A\Delta l \quad (6.23)$$

schreiben, und da $I = jA$, ist dann:

$$\Delta = \times \Delta l : \quad (6.24)$$

die Kraft pro Einheitslänge ist \times und hängt damit weder vom Vorzeichen der Ladung ab noch von der Ladungsmenge, die an einen bewegten Ladungsträger gebunden ist. Hätten die Ladungsträger das umgekehrte Vorzeichen, drehte sich auch die Richtung der Geschwindigkeit um. Gäbe es weniger Ladungsträger, müßte ihre Geschwindigkeit höher sein, um den vorgegebenen Strom zu erzeugen.

Diese Gleichung ist die Grundlage von elektrischen Meßinstrumenten (Drehspulgalvanometer) wie auch von Elektromotoren.

6.8 Das magnetische Feld statischer Ströme

Nach dem 3. NEWTONschen Axiom erwarten wir, daß nicht nur der Draht, durch den ein elektrischer Strom geschickt wird, in einem Magnetfeld eine Kraft erfährt, sondern daß umgekehrt auch die Magnetquelle eine Auslenkung erfährt, die auf eine Kraft schließen läßt. Wir wollen also der Frage nachgehen: Wie groß ist bei gegebenem Strom das Magnetfeld? Als Basis für unsere Antwort werden wir die dritte und vierte MAXWELL-Gleichung verwenden:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.4)$$

von denen bei statischem elektrischen Feld

$$c^2 \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (6.25)$$

übrigbleibt. Da

$$\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] \equiv 0 \quad (6.26)$$

bedeutet das, daß auch $\nabla \cdot \mathbf{j}$ immer Null sein muß, was auch für $\partial \rho / \partial t$ zur Folge hat, daß es Null ist. $\nabla \cdot \mathbf{j}$ bedeutet, daß der Strom im Kreis fließt, eben dem Stromkreis. Zwar sind sozusagen „Pumpstationen“ erlaubt — man denke an die Wasseranalogie —, aber keine Kondensatoren.

Der Zusammenhang zwischen Strom und magnetischem Feld wird durch Gl. (6.25) gegeben. Dieser Zusammenhang ist verschieden vom elektrostatischen Fall. Dort war $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, was bedeutete, daß das Linienintegral über einer geschlossenen Schleife immer Null war (STOKESScher Satz):

$$\oint_{\text{Schleife}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_A [\nabla \times \mathbf{E}] \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (6.27)$$

Wiederholen wir das für das magnetische Feld und setzen die Gl. (6.25) ein, erhalten wir

$$\oint_{\text{Schleife}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_A [\nabla \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}. \quad (6.28.1)$$

Da bei stationären Strömen der Strom durch die Fläche A unabhängig von deren Gestalt ist, ist das letzte Oberflächenintegral gleich dem Strom durch die Fläche A , und damit erhalten wir das Gesetz von AMPÈRE:

$$\oint_{\text{Schleife}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} I_{\text{durch die Schleife}}. \quad (6.28.2)$$

Wir definieren die magnetische Feldstärke nach

$$= \varepsilon_0 c^2 \quad . \quad (6.29)$$

Für einen stromdurchflossenen Draht bedeutet das den Aufbau eines Magnetfeldes im Abstand r vom Draht, dessen Durchmesser klein gegen r sei, daß

$$\cdot d = B \cdot 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} I \Rightarrow H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}, \quad (6.30.1)$$

oder vektoriell unter der Beachtung, daß $\perp \perp$:

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\times r}{r}. \quad (6.30.2)$$

Auf der Anziehung zweier Drähte, die von einem Strom einer Stärke von 1 A durchflossen werden, beruht die heutige Definition der Stromstärke. In einem Abstand von einem Meter hat das magnetische Feld eine Stärke von $2 \cdot 10^{-7}$ Wb/m², wenn durch den Leiter ein Strom von 1 A fließt. Nach den Gln. (6.30) finden wir für die Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke die nämliche der für das elektrische Feld eines Drahtes gültigen: eine hyperbolische, mit $1/r$ nach außen abfallende, jedoch ist die Richtung unterschiedlich (Abb. 6.4).

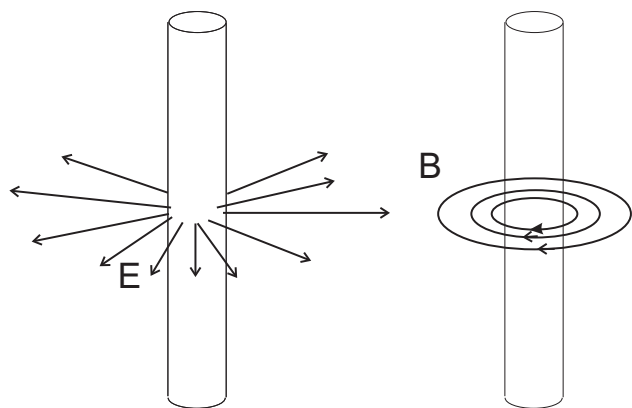


Abb. 6.4. Nach den Gln. (6.30) finden wir für die Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke die nämliche der für das elektrische Feld eines Drahtes gültigen: eine hyperbolische, mit $1/r$ nach außen abfallende, jedoch ist die Richtung unterschiedlich, tangential für die magnetische, radial für die elektrische Feldstärke.

Wir vergleichen die Gln. (6.30), bei deren Herleitung wir von einem ruhenden Draht mit bewegten Ladungsträgern, die den Strom durch den Draht darstellen (sog. *Laborsystem*), mit dem Fall eines ruhenden Drahtes in einem mitbewegten System, dessen Geschwindigkeit gleich der Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger sei. Dann sind die Elektronen, relativ gesehen, in Ruhe, und es kann kein Magnetfeld gemessen werden. Wie groß ist das elektrische Feld (Abb. 6.5)?

Nach dem GAUSSschen Satz ist in einem zylindrischen Draht der Länge l und des Radius r mit der Oberfläche $2\pi r l$ das elektrische Feld [σ ist die (zweidimensionale) Ladungsträgerdichte!]

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}. \quad (6.31.1)$$

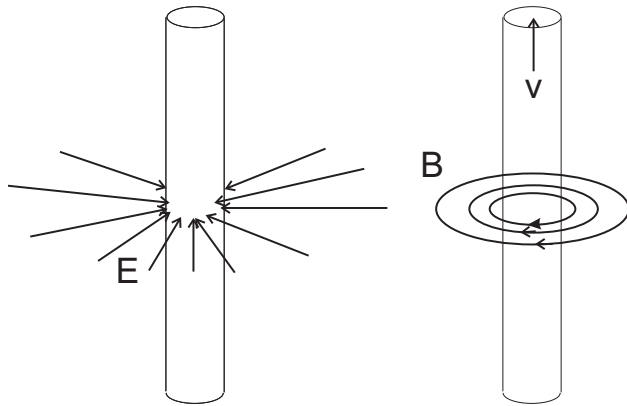


Abb. 6.5. Im mitbewegten System (lks., Geschwindigkeit v) erzeugt der mit der Driftgeschwindigkeit v fließende Strom nur ein radiales E -Feld, während im Laborsystem (re., ruhend) aus diesem E -Feld ein tangenciales B -Feld herauswächst. Dabei ist der Betrag des E -Feldes um den Faktor c^2/v größer als der des B -Feldes.

Wenn entlang des Drahtes des Querschnitts $A = \pi r^2$ ein Strom der Stärke $I = jA$ fließt, dann ist die transportierte Ladung

$$Q = \frac{jAl}{v}, \quad (6.31.2)$$

was zusammen also

$$E = \frac{I}{2\pi r v \epsilon_0} \quad (6.31.3)$$

ergibt. Damit besteht zwischen E und H der betragsmäßige Zusammenhang

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 v} H, \quad (6.31.4)$$

bzw. zwischen E und B die Beziehung

$$E = \frac{c^2}{v} B, \quad (6.31.5)$$

den wir im Abschn. 2.2 bereits vermuteten. Es besteht also eine enge Beziehung der Feldgrößen des elektrischen und magnetischen Feldes, die über das Verhältnis der Geschwindigkeit der bewegten Ladungsträger zur Lichtgeschwindigkeit c gegeben ist. Dies ist genau das Gebiet der Relativitätstheorie, und man kann zeigen, daß das magnetische Feld die relativistische Ergänzung des elektrischen Feldes ist, wenn sich die Ladung (gleichförmig) bewegt. Gemäß der NEWTONSchen Mechanik sind ja gleichförmig bewegte Systeme Inertialsysteme und können von ruhenden Systemen nicht unterschieden werden. Für den Fall $v = c$ ist also das B -Feld um $1/c$ schwächer als das elektrische Feld, das gilt z. B. für das relativistische Teilchen *Photon*.

6.9 Das magnetische Feld einer Spule

Viele dicht nebeneinanderliegende, gegeneinander isolierte Drähte bilden eine Spule oder ein Solenoid (Abb. 6.6).

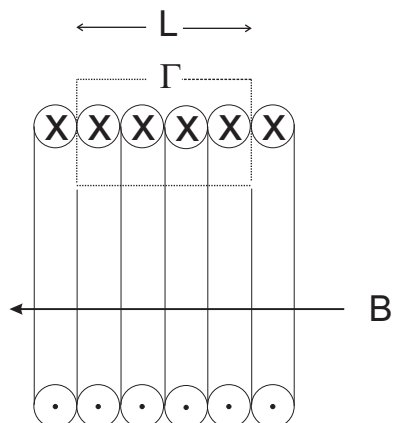


Abb. 6.6. Das magnetische Feld einer langen Spule mit der Windungsdichte N/L . Die Flußdichte B bzw. die magnetische Feldstärke H ist proportional der Windungsdichte, dem durchfließenden Strom, aber unabhängig von der Länge der Spule und steht senkrecht zur Richtung des Stromflusses.

1. Ist die Länge der Spule groß gegen ihren Durchmesser, ist das Feld außerhalb der Spule sehr klein gegenüber dem Feld innerhalb der Spule, vereinfachend: innerhalb $B = B$, außerhalb: $B = 0$ (Abb. 6.7).

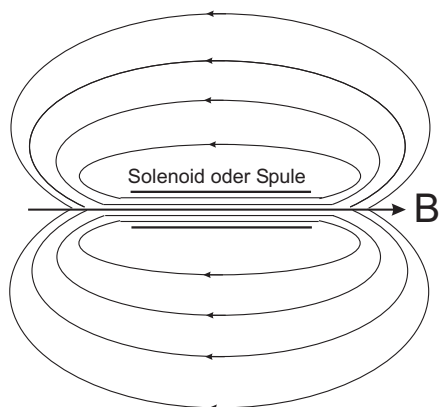


Abb. 6.7. Das magnetische Feld einer langen Spule ist innerhalb der Spule sehr groß, was durch die Dichte der Feldlinien angedeutet wird, außerhalb dagegen sehr klein.

2. Da zusätzlich $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, müssen die Feldlinien parallel zur Spulenachse und senkrecht zur Richtung des Stromes gehen, da wg. GAUSSSchem Satz

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (6.32.1)$$

nur dann o.B.d.A. gelten kann, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

3. Ist die Länge der Spule L , dann ist das Linienintegral wg. (1)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{d} = B L, \quad (6.32.2)$$

4. es ist nach dem AMPÈRESchen Gesetz [Gl. (6.28)]:

$$B L = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} I_{\Gamma}. \quad (6.33)$$

5. Die Windungsdichte der Spule ist N/L mit der Länge L bei N Windungen; die Flußdichte ist dieser Größe direkt proportional:

$$B L = \frac{N I}{\varepsilon_0 c^2} \Rightarrow B = \frac{N}{L} \frac{I}{\varepsilon_0 c^2}. \quad (6.34)$$

6.9.1 Das Feld am Spulenende

Wie aus Abb. 6.7 ersichtlich, fächern die im Innern einer langen Spule parallelen und dichten Feldlinien am Ende auf: das Feld nimmt ab. Wie aus der letzten Überlegung hervorging, ist nicht die Zahl der Windungen, sondern deren Windungsdichte N/L verantwortlich für die Stärke der Flußdichte. Jede einzelne Windung trägt also auf jeder ihrer zwei Seiten hälftig zum Gesamtwert bei. Am Ende einer Spule fehlt der letzten Windung ihr Pendant. Daher müssen am Ende einer langen Spule die Feldstärke wie der magnetische Fluß auf die Hälfte abgesunken sein.

6.9.2 Feldstärke und Flußdichte

Der Faktor

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0 \quad (6.35)$$

wird als magnetische Feldkonstante bezeichnet und hat den Wert

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}, \quad (6.36)$$

was, in Gl. (6.34) eingesetzt, die Definitionsgleichung der magnetischen Feldstärke H ergibt:

$$B = \mu_0 \frac{N I}{L} = \mu_0 H \quad (6.37)$$

Während H die Entstehung des Feldes aus freien Strömen beschreibt, deren Stärke man etwa mit einem Ampèremeter messen kann, verwendet man B , um die Wirkung des Magnetfeldes auf Ströme (bewegte Ladungen) zu charakterisieren.

6.9.3 Drehspulgalvanometer

Ein rechteckiges Rähmchen, dessen Breite klein gegenüber dessen Länge ist, ist um eine Achse drehbar gelagert, die senkrecht zur Zeichenebene in der Abb. 6.8 steht. Das Rähmchen ist von einem dünnen, isolierten Draht umsponnen, der an seinen Enden in zwei Spiralfedern oder Aufhängebänder übergeht, durch die ein elektrischer Strom eingepreßt werden kann. Im homogenen Magnetfeld erfährt der Strom eine Kraft, die der Stromstärke proportional ist. Diese Kraft erzeugt ein Drehmoment; und im Gleichgewicht ist

$$= 2 \times = {}^{\circ}D\phi, \quad (6.38)$$

wenn ${}^{\circ}D$ das Richtmoment der Spiralfeder ist.

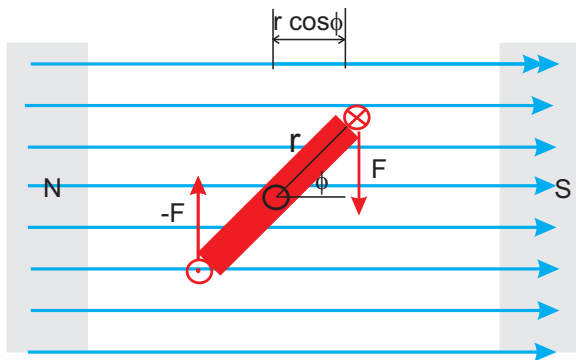


Abb. 6.8. Drehspulgalvanometer im homogenen Magnetfeld.

Dreht sich nun die Spule unter der gegenseitigen Einwirkung der Magnetfelder, ändert sich das Drehmoment zusätzlich dadurch, daß der Hebelarm keine konstante Länge aufweist, sondern die Projektion von auf die Feldlinien darstellt. Daher ist das Drehmoment nicht nur von , sondern zusätzlich von der Stellung der Spule zum Magnetfeld, also von , genauer vom $\cos \varphi$, abhängig. Daher ist ein Drehspulgalvanometer im homogenen Magnetfeld unbrauchbar.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, verwendet man einen Hufeisenmagneten, zwischen dessen zylindrisch ausgehöhlten Polschuhen ein zylindrischer Kern aus Weicheisen sitzt, der von außen festgehalten wird. In dem Luftspalt zwischen beiden verlaufen nun die Feldlinien radial, und steht somit stets senkrecht auf (Abb. 6.9). Der Hebelarm bleibt gleich diesem Radius, ist also konstant. Wenn nun in der Spule, die um eine Achse drehbar ist, welche mit der Zylinderachse zusammenfällt, ein Strom fließt, dann durchsetzen die der Achse parallelen Spulendrähte, deren Länge l sei, in jeder Lage das Feld senkrecht. Fließt der Strom I durch die Spule, greift an der Spule ein Kräftepaar mit dem Drehmoment

$$= 2 \times = 2NI \times \times \quad (6.39.1)$$

an (N ist die Windungszahl). $2r$ ist aber gerade die Breite der Spule (zum Magnetfeld parallel), damit $2rl = A$. Damit ist das Drehmoment (skalar, weil alle Vektoren aufeinander senkrecht stehen!):

$$M = NBIA = \int D\phi \Rightarrow \phi \propto I. \quad (6.39.2)$$

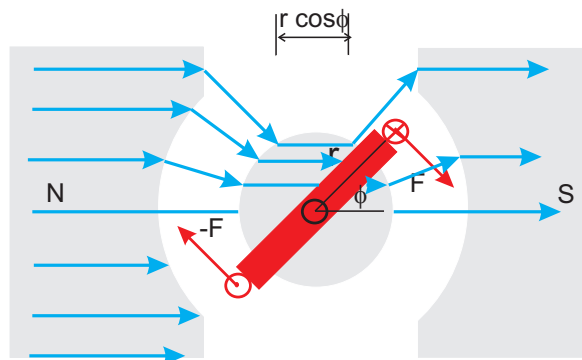


Abb. 6.9. Drehspulgalvanometer im radialen Magnetfeld.

Damit ist dieses Instrument als Ampèremeter brauchbar.

6.10 Materie im Magnetfeld

Durch Einbringen eines Eisenkerns in eine Spule wird die magnetische Flußdichte um ein bestimmtes Verhältnis gegenüber Luft oder Vakuum (daher Luftspule) erhöht, die sog. relative Permeabilität μ_r . Grund dafür ist zunächst das allgemeine magnetische Verhalten der Materie, das darauf beruht, daß die um den Atomkern umherlaufenden Elektronen Kreisströme bilden, die ein magnetisches Feld verursachen. Zusätzlich weisen die Elektronen einen Spin auf, der klassisch nicht erklärbar ist. Eine unvollkommene Beschreibung dieses Sachverhalts besteht in der Eigenrotation der Elektronen.

Diese einzelnen, atomaren Magnetfelder löschen sich in Folge der Wärmebewegung meist aus. Beim Hineinbringen in ein Magnetfeld kommt es zu einer zusätzlichen Ausrichtung: Systeme mit ungepaarten Elektronen werden ins Magnetfeld hineingezogen und verstärken es, was man phänomenologisch daran sieht, daß die Indikatoren der Feldlinien, die Eisennadeln, sich parallel zu den Feldlinien orientieren — das ist z. B. bei Sauerstoff der Fall. Systeme mit gerader Elektronenzahl werden dagegen aus dem Magnetfeld gedrängt und schwächen es, die Eisennadeln stehen eher senkrecht auf den Feldlinien. In jenem Fall spricht man von Para-, im zweiten Fall von Diamagnetismus, und wir erweitern die Gl. (6.37):

$$B = \mu_0 \mu_r H. \quad (6.40)$$

Im Entfernungsgesetz (2.3) erscheint das — wie γ im Gravitationsgesetz, wie ε_0 im elektrischen Gesetz — im Nenner. Hier aber handelt es sich um zwei gedachte

Monopole der Polstärke P (Nordpol und Südpol), die um die Entfernung r getrennt sind, aber dennoch nicht isoliert werden können — der ideale Demonstrationsfall ist ein Stabmagnet (s. Abschn. 2.2), aus dessen Polen der magnetische Fluß quillt (Nordpol) bzw. verschwindet (Südpol):

$$F = \frac{P_1 P_2}{4\pi\mu_0\mu r^2} = \frac{P\Phi}{4\pi r^2}, \quad (6.41.1)$$

wobei die durch μ_0 dividierte Polstärke den magnetischen Fluß bezeichnet. Da μ_0 den Wert $4\pi \cdot 10^{-7}$ und die Einheit $\frac{\text{Vsec}}{\text{Am}}$ hat [Gln. (6.35/36)], ergibt sich für die magnetische Polstärke die Einheit Vsec. Das Verhältnis zwischen Kraft und Polstärke ist dann analog zur Definition der elektrischen Feldstärke die magnetische Feldstärke, und wir schreiben das als Bestimmungsgleichung für verschwindende Polstärke des Probemagneten, der im Einflußbereich des betrachteten Magneten steht, als

$$= \lim_{P_2 \rightarrow 0} \frac{H}{P_1}, \quad (6.41.2)$$

wobei die Dimension von H natürlich A/m ist, und damit ist die Einheit von B nach Gl. (6.37) dann Vsec/m².

Damit ist die Analogie zum Feld einer Punktladung aber erschöpft, da es — wie oben bemerkt — keine magnetischen Monopole gibt. Die Feldlinien müssen daher immer geschlossen sein.

Da ein Stabmagnet ein inhomogenes Magnetfeld erzeugt, ist es einfacher, an das homogene Magnetfeld eines Hufeisenmagneten zu denken, zwischen dessen Polen ein Medium gebracht wird. Die Gln. (6.40/41) bedeuten also, daß **eine diamagnetische Substanz die Kraft zwischen den Magneten erhöht, während sich gleichzeitig die Flußdichte verringert. Eine paramagnetische Substanz zwischen den Polen erniedrigt die Magnetfeldstärke, aber die Flußdichte wird erhöht.** Besonders drastisch ist dieser Effekt bei den Ferromagnetika ausgeprägt: ein Eisenstab, quer über die Polschuhe gelegt, erniedrigt die nach außen wirkende Magnetfeldstärke derart, daß das System nahezu unmagnetisch wirkt.

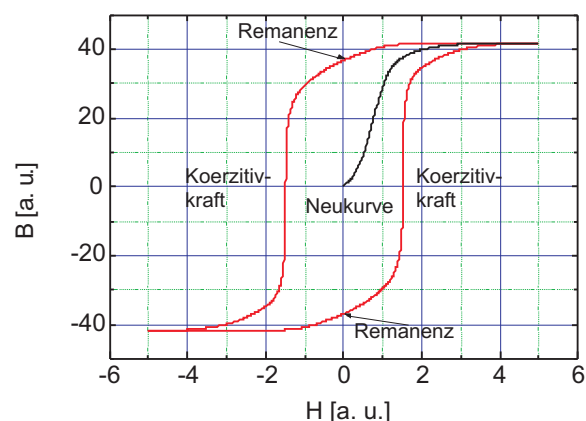
In Ferromagnetika, die ebenfalls ungepaarte Elektronen aufweisen, existieren kleine Bezirke, die sog. WEISSschen Bezirke, mit vollständig ausgerichteten Atomen; allerdings sind die WEISSschen Bezirke statistisch verteilt. Durch Einbringen in ein Magnetfeld können diese Bezirke ausgerichtet werden (Tab. 6.1 u. Abb. 6.10). Ihre Permeabilität ist sehr groß und zusätzlich feldabhängig, dazu von der Vorgeschichte abhängig — bei einer Neuentdeckung würden wir heute von einem *Memory-Effect* sprechen.

Der Ferromagnetismus ist an die kristalline Form gebunden. Eisendampf verhält sich wie die meisten Gase paramagnetisch. Je nach Breite der Hysteresekurve unterscheidet man zwischen magnetisch weichen und harten Materialien. Je höher die Koerzitivkraft, desto härter das Material. Durch den Flächeninhalt der Hystereseschleife ist die Arbeit gegeben, die für die Magnetisierung verbraucht wird.

Alle ferromagnetischen Stoffe besitzen diese Eigenschaft nur unterhalb der CURIE-Temperatur (s. Tab. 6.1). Für alle höheren Temperaturen verhalten sie sich wie

Tabelle 6.1. Maximalwerte relativer Permeabilitäten μ_r .

<i>diamagnetisch</i>		<i>paramagnetisch</i>		<i>ferromagnetisch</i>	
Wismut	0,99984	Luft	1,0000037	Gußeisen	800
Quecksilber	0,999970	O ₂	1,0000018	Flußstahl	4000
Silber	0,999975	Aluminium	1,00002	Trafo-Blech	8000
Blei	0,999984	Platin	1,00026	Mu-Metall	100 000
Kupfer	0,99999	Eisen (1200 °C)	1,0026	Permalloy	300 000
Wasser	0,999991	Eisen (800 °C)	1,15		

**Abb. 6.10.** Hystereseschleife mit Neukurve, Remanenz und Koerzitivkraft: Beginnend im Ursprung, erhöht sich B bei steigendem externen Feld bis zur Sättigung. Beim Zurückfahren des externen Feldes verbleibt ein remanentes Feld, das nur mit hoher Koerzitivkraft wieder zu Null gemacht werden kann.

paramagnetische Stoffe, sowohl in Bezug auf die Größenordnung der Permeabilität als auch in Bezug auf ihre Temperaturabhängigkeit.

Die Tatsache, daß bei Ferromagnetika — im Gegensatz zu den paramagnetischen Stoffen — volle Sättigung erreicht werden kann, berechtigt zu der Annahme, daß dann alle zur Magnetisierung beitragenden Elektronenspins in der Feldrichtung eingestellt sind. Die Wärmebewegung, die bei den paramagnetischen Stoffen die Ordnung so sehr stört, daß das äußere Feld nur eine ganz geringe Ausrichtung erzwingen kann, vermag also bei den ferromagnetischen Stoffen die vollständige Ordnung nicht zu unterdrücken, solange die Temperatur unter dem CURIE-Punkt bleibt.

In den WEISSschen Bezirken ist das ferromagnetische Material auch bei Abwesenheit äußerer Felder, ohne eine Richtung zu bevorzugen, bis zur Sättigung magnetisiert, wobei die einzelnen Bereiche durch die BITTER-Linien voneinander getrennt sind. Wird der Kristall in einem äußeren Magnetfeld (partiell) magnetisiert, werden die Bezirksgrenzen zu Gunsten jener Bezirke verschoben, deren magnetisches Moment bereits in Richtung des äußeren Feldes zeigt; dies geschieht sprunghaft (BARKHAUSEN-Sprünge).

Wie oben bereits gesagt, hat es sich gezeigt, daß dieser „gebundene“ Magnetismus durch Kreisströme der Elektronen in den Atomen verursacht wird. Diese Ströme sind

nicht „einfach“ mit einem Amperemeter meßbar, aber sie erzeugen ein magnetisches Moment. Dieses läßt sich aus dem BOHRschen Atommodell einfach und plausibel (deswegen aber noch lange nicht richtig!) erklären:

Unter dem magnetischen Moment versteht man das Produkt aus Strom und umkreister Fläche:

$$\mu = I \cdot A, \quad (6.42)$$

und die Magnetisierung ist das magnetische Moment pro Volumeneinheit:

$$M = \frac{\mu}{V}. \quad (6.43)$$

Die Angabe $M = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$ z. B. bedeutet, daß das magnetische Moment von 1 cm^3 Materie 2 kA cm^2 beträgt.

Angewendet auf ein Elektron, daß sich auf dem BOHRschen Radius a_0 mit $1/137$ der Lichtgeschwindigkeit um ein Proton bewegt, wobei eine Fläche $A = \pi a_0^2$:

$$\mu = e_0 \frac{v}{2\pi a_0} \cdot \pi a_0^2 = e_0 \frac{v a_0}{2}, \quad (6.44)$$

da mit der Kreisbewegung des Elektrons ein Drehimpuls verbunden ist ($L = m_e v r$), bedeutet das

$$\mu = \frac{e_0}{2m_e} L = \gamma L \quad (6.45)$$

mit $\gamma = \frac{e_0}{2m_e}$ dem gyromagnetischen Verhältnis. Damit ist gezeigt, daß der elektronische Kreisstrom mit einem Magnetfeld verbunden ist.

Oft wird auch die magnetische Suszeptibilität verwendet, die den Zusammenhang zwischen der Magnetisierung M und der magnetischen Feldstärke H herstellt:

$$M = \chi H, \quad (6.46)$$

und die magnetische Flußdichte im materieverfüllten Raum ist schließlich:

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0 H(1 + \chi), \quad (6.47)$$

was algebraisch äquivalent zur Gl. (5.27) ist und die Ähnlichkeit zwischen den Prozessen der Magnetisierung bzw. der Polarisierung von Materie zum Ausdruck bringt. Insbesondere ist keine Annahme über ihre Struktur (atomar oder kontinuierlich veränderbar) gemacht. Auch wird daraus erneut ersichtlich, daß ein qualitativer Unterschied zwischen μ und M besteht, weil die Flußdichte durch meßbare Ströme und durch Kreisströme erzeugt wird, während die Feldstärke nur durch fließende Ströme erzeugt wird.

6.10.1 Der Elektromagnet

Die magnetische Flußdichte im Innern einer Luftspule wird also durch einen Kern aus Weicheisen verstärkt. Leider konzentrieren sich die Feldlinien im Innern der Spule. Wir benötigen das Feld aber außerhalb, wo das Feld notwendig divergent ist. Nehmen wir zunächst einen Torus aus Eisen, den wir mit einem Kupferdraht umwickeln (Abb. 6.11).

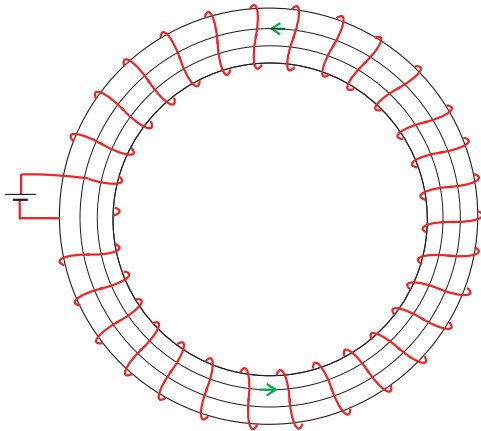


Abb. 6.11. Ein Eisentorus wird mit einem Kupferdraht umwickelt, durch den Strom geschickt wird. Es baut sich ein magnetisches Feld \mathbf{H}_1 mit einer Flußdichte \mathbf{B}_1 auf.

Wird ein Luftspalt in diesem Torus erzeugt, dann ist die Flußdichte Φ_2 wg. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (nahezu) genauso hoch wie im Torus, sie soll hier Φ_1 sein (Abb. 6.12). Im Spalt ist aber auch die Magnetisierung vernachlässigbar. Also muß dort $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2$ sein. Wenn die Flächen gleich groß sind, dann müssen also sowohl die Flüsse wie die Flußdichten im Eisen und im Luftspalt gleich groß sein:

$$\Phi_1 = B_1 A_1 = \Phi_2 = B_2 A_2 \Rightarrow B_1 = B_2. \quad (6.48)$$

Das bedeutet aber, daß die magnetische Feldstärke um den Faktor μ größer ist als im Eisen. Für die magnetische Feldstärke H_1 gilt nach dem STOKESchen Satz

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}; \quad (6.49)$$

der Integrand ist aber nach der 2. MAXWELL-Gleichung für den statischen Fall gleich der Stromdichte \mathbf{j} .

Damit wird

$$H_1 l + H_2 d = j, \quad (6.50)$$

woraus mit $B_2 = \mu_0 H_2$ und $\Phi_1 = \Phi_2$

$$H_1 l + B_1 d = j \quad (6.51)$$

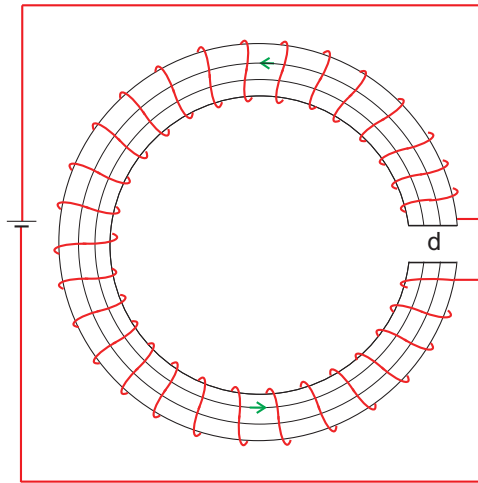


Abb. 6.12. Wird ein Luftspalt in diesem Torus erzeugt, dann ist die Flußdichte \mathbf{B}_2 wg. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ genauso hoch wie im Torus, sie soll hier \mathbf{B}_1 sein. Im Spalt ist aber auch die Magnetisierung vernachlässigbar. Also muß dort $\mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2$ sein.

folgt. Wir haben damit eine Beziehung zwischen der Summe aus Feldstärke und Flußdichte mit der Stromdichte gefunden. Der Zusammenhang zwischen den beiden magnetischen Größen wird uns über die Hysteresekurve geliefert, in die wir die lineare Beziehung zwischen j und H eintragen. Die Schnittpunkte der Graphen sind unsere Lösung (Abb. 6.13).

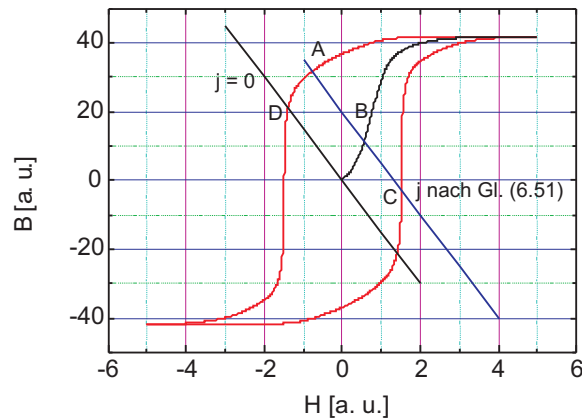


Abb. 6.13. Blaue Gerade: Je nach Vorgeschichte wird die magnetische Flußdichte im Spalt des Elektromagneten verschieden hoch sein. Punkt B: jungfräuliche Kurve, Punkt A: bereits mit hohem Strom Remanenz erzeugt, Punkt C: mit hoher Koerzitivkraft ist B unter den Wert der jungfräulichen Kurve gedrückt. Schwarze Gerade: Auch bei Stromdichte Null in der Spule gibt es verschiedene Lösungen. So ist am Punkt D durch die Vorbehandlung ein Permanentmagnet entstanden.

Diese Gleichung gilt um so besser, je enger der Luftspalt ist, sonst quellen die Feldlinien seitlich heraus. Mit der Gl. (6.50) wird mit $H_1 = \frac{H_2}{\mu}$

$$\frac{H_2}{\mu}l + H_2d = j = NI, \quad (6.52)$$

erweitert mit μ_0

$$H_2 = \frac{NI}{\frac{l}{\mu} + d}, \quad (6.53)$$

bzw. näherungsweise für $d \ll \frac{l}{\mu}$

$$H_2 = \frac{\mu NI}{l} \quad (6.54.1)$$

oder für die Flußdichte

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu NI}{l} : \quad (6.54.2)$$

Durch den Eisenkern werden H und B um den Faktor μ auch im Spalt vergrößert. Ist dagegen $d \gg \frac{l}{\mu}$, so, als ob die Spule nur auf den engen Spalt mit der Breite d aufgewickelt worden wäre. Ein Elektromagnet ist also ein „Trade-off“ zwischen Wünsch- und Machbarem.

6.11 Das Gesetz von Biot und Savart

Das Ziel ist, für den stationären Zustand bei Kenntnis der elektrischen Größen das Magnetfeld oder die magnetische Flußdichte zu bestimmen. Gehen wir wieder von der ersten MAXWELL-Gleichung aus:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{j} \quad (3.3)$$

Für die Auflösung dieser Gleichung machen wir einen Ansatz unter der Annahme, daß sich der Vektor $\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{A}$ als Rotation eines anderen Vektors \mathbf{A} darstellen läßt:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (6.55)$$

was nach dem Satz von STOKES $\int_V \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ nach sich zieht, und was mit Gl. (3.3)

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}] = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.56)$$

ergibt und nach dem Entwicklungssatz weiter zu

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.57)$$

führt. Da wir zur Darstellung von \mathbf{H} nur die Rotation von \mathbf{A} benötigen, können wir

- zu Φ_{el} eine additive Konstante hinzufügen, da sie bei der Ableitung herausfällt und darüber hinaus auch
- über die Divergenz von \mathbf{A} noch frei verfügen und nehmen sie in der Magnetostatik zu Null an (sog. COULOMB-Eichung):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (6.58)$$

Damit wird aus Gl. (6.57):

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (6.59)$$

was die vektorielle Analogie zur POISSON-Gleichung $\Delta \Phi_{\text{el}} = -\rho/\varepsilon_0$ darstellt. Die Lösung war für eine Raumladung ρ

$$\Phi_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho d^3x}{r}. \quad (6.60)$$

“The same equations have the same solutions.” Daher erhalten wir für das Vektorpotential im Vakuum:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} d^3x}{r} \Rightarrow \mathbf{A}(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(x_2, y_2, z_2) d^3x}{r_{12}}, \quad (6.61)$$

woraus sich für die magnetische Flußdichte

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{j} d^3x}{r} \quad (6.62)$$

ergibt. Dabei erstreckt sich die Integration über das Volumenelement (2), in dem der Stromfluß (2) stattfindet, während die Bildung der Rotation an den Stellen des Raumes (1) stattfindet, an denen man die magnetische Flußdichte bzw. das magnetische Feld berechnen will, also senkrecht zu \mathbf{A} und um

$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ vom stromdurchflossenen Element entfernt:

$$\mathbf{B}(1) = \nabla \times \mathbf{A}(1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V_2} \frac{\mathbf{j}(2) d^3x(2)}{r_{12}}, \quad (6.63)$$

also folgt etwa für die x -Komponente

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y_1} A_z - \frac{\partial}{\partial z_1} A_y \quad (6.64.1)$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \left[j_z \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r_{12}} - j_y \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r_{12}} \right] d^3x(2), \quad (6.64.2)$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \left[j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3} \right] d^3x(2), \quad (6.64.3)$$

was die x -Komponente des Kreuzprodukts

$$\frac{\times_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\times_{12}}{r_{12}^2} \quad (6.64.4)$$

ist, insgesamt also

$$(1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (2) \times \nabla \frac{1}{r} \quad d^3x(2), \quad (6.65)$$

was einfach

$$(1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \frac{(2) \times (2)}{r_{12}^3} \quad d^3x \quad (6.66)$$

ergibt: und stehen überall senkrecht auf und (Gesetz von BIOT und SAVART). Im Prinzip lassen sich die Felder eines Drahts oder einer Spule aus den Beiträgen der Stromdichteelemente aufsummieren. Fließt der Strom z. B. in einem dünnen Leiter, so ist jdV etwa $I ds$, und aus Gl. (6.66) wird

$$(1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \quad \frac{d(2) \times_{12}}{r_{12}^3}. \quad (6.67)$$

6.12 Linearität und Superpositionsprinzip

Die beiden Gleichungen für ein statisches Magnetfeld

$$\nabla \times \quad = \frac{\quad}{\varepsilon_0 c^2}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \quad = 0 \quad (3.8)$$

sind linear in und , weshalb sie dem Superpositionsprinzip gehorchen.

Die allgemeine Lösung einer derartigen DGL (im ersten Fall inhomogen, im zweiten Fall homogen) gewinnt man ja durch die Summe aus homogener und einer speziellen partikulären Lösung. Im einfachsten Fall einer homogenen DGL ist klar, daß mit dem System

$$a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = 0 \quad (6.68.1)$$

$$a(x)y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2 = 0 \quad (6.68.2)$$

wir für die Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ durch Einsetzen in die Gleichungen (6.68) und Summation der beiden Lösungen in beliebigen Verhältnissen auch wieder eine Lösung dieses Systems erhalten, da die rechte Seite immer Null ergibt, also:

$$a(x)(y_1'' + y_2'') + b(x)(y_1' + y_2') + c(x)(y_1 + y_2) = 0, \quad (6.69.1)$$

aber auch

$$a_1(x)y_1'' + a_2y_2'' + b_1(x)y_1' + b_2(x)y_2' + c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = 0, \quad (6.69.2)$$

was man als Linearkombination bezeichnet. Man kann also die Lösung der DGLn aus den Einzellösungen und anschließende Addition erhalten. Dasselbe gilt, wenn auf der rechten Seite von (6.69) nicht Null, sondern irgendwelche Funktionen $f(x)$

$$a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = f_1(x) \quad (6.70.1)$$

$$a(x)y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2 = f_2(x) \quad (6.70.2)$$

stehen. Statt (6.70) bekommen wir dann

$$a(x)(y_1'' + y_2'') + b(x)(y_1' + y_2') + c(x)(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x), \quad (6.71)$$

und die Lösung $y(x)$ ist demnach die Summe der Teillösungen

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x). \quad (6.72)$$

6.13 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 6.1 Zeigen Sie mit dem AMPÈRESchen Gesetz, daß es unmöglich ist, in Analogie zu $\mathbf{H} = \nabla\Phi(\mathbf{r})$ ein *Magnetisches Potential* zu definieren.

Lösung.

Aus dem AMPÈRESchen Gesetz geht hervor, daß ein elektrischer Strom durch einen Leiter ein magnetisches Wirbelfeld bildet:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1)$$

woraus nach dem STOKESSchen Satz

$$\nabla \times \mathbf{d} = \mathbf{j} \quad \mathbf{d} = I \quad (2)$$

folgt. Wenn jetzt die magnetische Feldstärke als Gradient eines Potentials definiert werden könnte, dann wäre

$$\nabla \times \mathbf{d} = -\nabla \times [\nabla\Phi(\mathbf{r})], \quad (3)$$

was umgeschrieben

$$\nabla \times \mathbf{d} = -\nabla \times \nabla[\Phi(\mathbf{r})] \quad (4)$$

ergeben würde. $\nabla \times \nabla$ ist aber, wie das Kreuzprodukt eines jeden Vektors mit sich selbst, Null. Das ist ein Widerspruch zu Gl. (1).

Aufgabe 6.2 Ein Strom von 10 A, der ein 4 cm langes Drahtstück im Feld eines Elektromagneten durchfließt, erfährt die Kraft von 20 p. Wie groß ist die magnetische Induktion senkrecht zum Leiter?

Lösung.

$$B = \frac{F}{I s} = 0,490 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}. \quad (1)$$

Aufgabe 6.3 Welcher Strom muß durch ein 50 cm langes Drahtstück fließen, damit es in einem Feld von 0,1 Vsec/m² die Kraft 1 kp erfährt, wenn es senkrecht zum Feld steht?

Lösung.

$$I = \frac{F}{B s} = 196,2 \text{ A}. \quad (1)$$

Aufgabe 6.4 Wie groß sind die magnetische Induktion B und die magnetische Feldstärke H in einer 60 cm langen Spule, die 1000 Windungen aufweist und von 2 A durchflossen wird? Was spielt der Querschnitt der Spule für eine Rolle?

Lösung.

$$B = 4,18 \text{ mT}, \quad (1)$$

$$H = 3,3 \frac{\text{kA}}{\text{m}}. \quad (2)$$

Aufgabe 6.5 Zwei lange Drähte werden vom Strom I durchflossen. Bestimmen Sie die Kraft, die sie aufeinander ausüben, wenn die Leiter im Abstand r parallel zueinander stehen, und zwar für gleich- und entgegengesetzt gerichtete Ströme!

Lösung. Das entstehende Magnetfeld steht senkrecht zum Leiter und beträgt

$$d = I, \quad (1)$$

nach Integration:

$$H 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (2)$$

und dessen Flußdichte

$$H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (3)$$

Damit wird die Kraft

$$= I \times \quad , \quad (4)$$

und wir treffen die Fallunterscheidung

- parallel:

$$F = BIl \wedge B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow F = \mu_0 \frac{I^2 l}{2\pi r}, \quad (5)$$

bzw. auf das Längenelement l bezogen:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} : \quad (6)$$

Gleichgerichtete Ströme: $F > 0$, und die Leiter ziehen sich an und umgekehrt, und

- senkrecht erhalten wir für jedes Drahtelement an der Stelle x , wobei $x = 0$ für minimalen Abstand, eine abstandsabhängige Kraft, die wir, ausgehend von (4), bestimmen zu:

$$F = BIl \sin \phi \wedge \sin \phi = \frac{x}{R}, \quad (7)$$

wobei

$$R^2 = x^2 + r^2. \quad (8)$$

Damit wird

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2 x}{2\pi R R} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{x}{x^2 + R^2}. \quad (9)$$

Aufgabe 6.6 Die Sättigungsmagnetisierung in Eisen beträgt etwa $1,7 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$. Wie groß ist das magnetische Moment eines einzelnen Eisenatoms, wenn man annimmt, daß bei Sättigung alle atomaren Momente ausgerichtet sind?

Lösung.

$$M = \chi H = \mu \frac{N}{V} = \mu n. \quad (1)$$

$$n = \frac{N_A}{V_M} = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{(55,8 \text{ g/Mol}) / (7,8 \text{ g/cm}^3)} = 8,4 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3. \quad (2)$$

Sind alle Atome ausgerichtet, ist nach Gl. (1)

$$\mu = 2,0 \cdot 10^{-19} \text{ Acm}^2. \quad (3)$$

Aufgabe 6.7 In einem langen, linearen Draht fließt ein Strom von 10 A. Bestimmen Sie die magnetische Flußdichte in den Punkten (angegebene Koordinaten in cm)

- $A (1,1,0)$;
- $B (1,1,1)$;
- $C (10,10,10)$;
- $D (10,-10,-10)$;
- $E (16,-4,-4)$?

Lösung. Zweckmäßigerweise legt man ein cartesisches Koordinatensystem so, daß eine Achse — meist wird die z -Achse ausgewählt — mit der Drahtachse und der positiven Stromrichtung zusammenfällt. Zu bilden ist das Umlaufintegral

$$\oint_C \mathbf{d} = I \quad (1)$$

längs eines Kreises in der $x - y$ -Ebene mit 0 als Mittelpunkt. Dabei nimmt die magnetische Feldstärke radial nach außen ab und steht parallel zum Bahnvektor. Da überall senkrecht auf Radius- und Stromvektor stehen muß, ist die Komponente H_z Null.

Es gilt dann (skalar) für die Vektoren H und B :

$$|H| = \frac{I}{2\pi r} \quad \wedge \quad |B| = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}. \quad (1)$$

Die z -Komponente ist Null, da H senkrecht auf Radiusvektor und Stromfadvektor steht, und die Komponenten in x - und y -Richtung ($H_x = H_0 \sin \varphi$, $H_y = H_0 \cos \varphi$) sind jetzt separat zu ermitteln und vektoriell zu addieren. Der Kreispythagoras ergibt $\sin \varphi = \frac{x}{r}$ und $\cos \varphi = \frac{y}{r}$, dabei ist weiter zu beachten, daß wegen der umgekehrten Stromrichtung wir eine Linksschraube vorliegen haben, also $H_x = -H_0 \sin \varphi$. Das wird exekutiert für Teilaufgabe A; die anderen entsprechend.

- $A (1,1,0)$: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$
- $H_0 = \frac{10}{2\pi \cdot \sqrt{2}} = 1,13 \cdot 10^{-2} \frac{\text{A}}{\text{m}}$.
- $H_x = -\frac{H_0}{\sqrt{2}} = 0,796 \frac{\text{A}}{\text{m}}$,
- $H_y = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = 0,796 \frac{\text{A}}{\text{m}}$;
- $B_x = -\mu_0 \frac{H_0}{\sqrt{2}} = -1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$,
- $B_y = \mu_0 \frac{H_0}{\sqrt{2}} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

Aufgabe 6.8 Aus Al ($\chi = 2 \cdot 10^{-5}$) wird ein Toroid mittleren Umfangs von $l = 20$ cm hergestellt und mit $N = 250$ Drahtwicklungen gleichmäßig umwickelt. Wenn durch den Draht ein Strom von $I = 10$ A fließt:

- Wie groß ist die Magnetisierung M des Aluminiums?
- Wie hoch ist die magnetische Flußdichte im Aluminium?
- Welcher Strom müßte fließen, damit in der leeren Spule die gleiche magnetische Induktion herrscht wie im Aluminium (wenn Strom fließt)?

Lösung.

Definitionsgleichungen mit Ergebnissen:

$$H = \frac{NI}{l} = 12\,500 \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (1)$$

$$M = \chi H = 0,25 \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (2)$$

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0 H(1 + \chi) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 12\,500 \cdot 1,00002 \frac{\text{Vsec}}{\text{m}^2}. \quad (3)$$

$$B = 1,57 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Vsec}}{\text{m}^2}. \quad (5)$$

Aus Gl. (3) ist ersichtlich, daß der Beitrag von M zu B verschwindend klein ist. Gleiches B ohne das Al-Toroid erhält man, indem man den Strom 20 ppm erhöht.¹

Aufgabe 6.9 Die Sättigungsmagnetisierung von Eisen beträgt etwa $1,7 \cdot 10^6$ A/m. Angenommen, eine bis zur Sättigung magnetisierte Kompaßnadel von 3 cm Länge und einem mittleren Querschnitt von $0,1 \text{ mm}^2$ steht im Winkel von 60° zum Erdmagnetfeld (0,2 G): Wie groß ist das Drehmoment auf die Nadel? Wie groß ist der Energiegewinn nach der Ausrichtung?

Lösung. Das Volumen der Nadel ist $3 \text{ mm}^3 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$, ihr magnetisches Moment folglich

$$\mu = \frac{M}{V} = 1,7 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-9} = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ A m}^2 = 51 \text{ A cm}^2. \quad (1)$$

$$B = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ T} = 0,2 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vsec}}{\text{cm}^2}. \quad (2)$$

Das Drehmoment ist

¹Bei Ferromagneten wird dieser Unterschied allerdings erheblich! Ausgerichtete magnetische Momente der Atome sind also gleichbedeutend mit zusätzlichem Spulenstrom.

$$= \times \quad (3.1)$$

$$= 51 \cdot 0,2 \cdot 10^{-8} \text{ A cm}^2 \frac{\text{V sec}}{\text{cm}^2} \sin 60^\circ = 8,8 \cdot 10^{-8} \text{ Nm}. \quad (3.2)$$

$$E = \int_{60^\circ}^{90^\circ} M d\varphi = \mu B \int_{60^\circ}^{90^\circ} \sin \varphi d\varphi, \quad (4.1)$$

$$E = -\mu B \cos \varphi \Big|_{60^\circ}^{90^\circ} = 51 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-8} = 5,1 \cdot 10^{-8} \text{ J} = 51 \text{ nJ}. \quad (4.2)$$

Aufgabe 6.10 Bestimmen Sie das Magnetfeld und das Vektorpotential im Punkt $P(r)$ eines langen geraden Drahtes, durch den ein Strom der Stärke I geschickt wird!

Lösung.

Die Konfiguration ist eindimensional; der Strom gehe in z -Richtung. Dann liegt das Magnetfeld in der x - y -Ebene, und der Einheitsvektor \mathbf{e}_r ist der Radiusvektor des Kreises mit dem Radius R , zu dem tangential, also senkrecht, das Magnetfeld steht (Abb. 6.14).

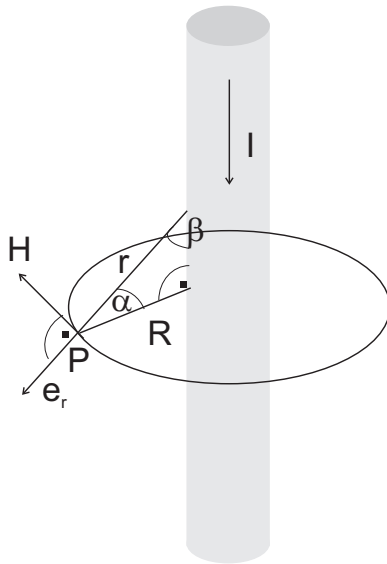


Abb. 6.14. Ein langer Draht werde in z -Richtung von einem Strom I durchflossen. Wie groß ist das erzeugte Magnetfeld am Punkte $P(R)$?

Als erstes berechnen wir das Vektorprodukt. Der Betrag ist

$$|\mathbf{d}_2 \times \mathbf{e}_2| = \sin \beta dz = \cos \alpha dz, \quad (1)$$

die Richtung natürlich das Magnetfeld. Damit ist

$$\left(\right) = \frac{I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{r^2} dz, \quad (3)$$

woraus mit $\tan \alpha = \frac{R}{z}$, was für $dz = \frac{R d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ ergibt, für das Magnetfeld

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \quad (4)$$

bzw. mit $\cos \alpha = \frac{R}{r}$ schließlich

$$H = \frac{I}{2\pi R} \quad (5)$$

folgt.

Aufgabe 6.11 Bestimmen Sie das Magnetfeld eines rotierenden Elektrons im Kreismittelpunkt mittels des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes!

Lösung.

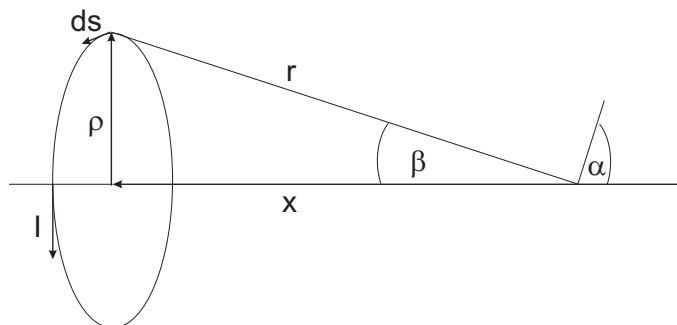


Abb. 6.15. Vom Elektron auf dem Radius ρ umkreiste Fläche. ds steht senkrecht auf ρ und r . Im Falle der Untersuchung des Mittelpunkts der Kreisfläche ist zusätzlich $\rho = r$.

Das BIOT-SAVARTSche Gesetz lautet (Abb. 6.15)

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} I \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

wobei $d\mathbf{s} \perp \mathbf{r}$ und $\mathbf{r} \perp \mathbf{z}$ stehen, und

$$\sin \alpha = \frac{\rho}{r}, \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \beta = \frac{\rho}{r}. \quad (2)$$

Wir benötigen nur die x -Komponente, denn in den anderen Richtungen ergänzen sich alle Magnetfeldkomponenten zu Null:

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{ds}{r^3} r \sin \alpha \Rightarrow H = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho}{r^3} \int_0^{2\pi\rho} ds. \quad (3)$$

Somit erhalten wir für das Magnetfeld eines rotierenden Elektrons im Ursprung (wg. $r = \rho$):

$$H = \frac{I}{2} \frac{\rho^2}{r^3} \Rightarrow H = \frac{I}{2r}. \quad (4)$$

Aufgabe 6.12 Bestimmen Sie das Magnetfeld an einer beliebigen Stelle einer „langen“ Spule (Länge L mit N Windungen und dem Radius ρ) mit Hilfe des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes!

Lösung.

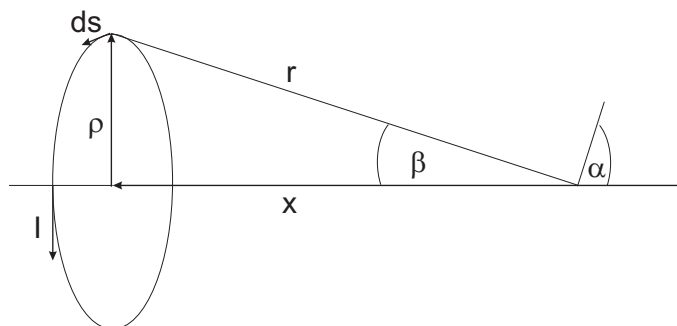


Abb. 6.16. Vom Strom I durchflossene Spulenwindung des Durchmessers ρ .

Das BIOT-SAVARTSche Gesetz lautet (Abb. 6.15)

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} I \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

wobei $\perp \times$ und \times stehen, und

$$\sin \alpha = \frac{\rho}{r}, \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \beta = \frac{\rho}{r}. \quad (2)$$

Wir benötigen nur die x -Komponente, denn in den anderen Richtungen ergänzen sich alle Magnetfeldkomponenten zu Null:

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \cos \beta \Rightarrow H = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho}{r^3} ds. \quad (3)$$

Mit

$$s = 2\pi\rho \wedge r^2 = x^2 + \rho^2 \Rightarrow r = \rho \sqrt{\frac{x^2}{\rho^2} + 1} \quad (4)$$

erhalten wir für das Magnetfeld einer Wicklung, z. B. an der Stelle X in der Mitte der Spule:

$$H = \frac{I\rho^2}{2r^3} \wedge H = \frac{I}{2} \frac{1}{\rho \sqrt{1 + x^2/\rho^2}}^3. \quad (5)$$

Das Gesamtfeld der Spule ist nun aus den einzelnen Beiträgen der Windungen zusammengesetzt, die in der Dichte

$$\frac{N}{L} \quad (6)$$

über die Länge dx gleichmäßig verteilt sind:

$$dH = \frac{I}{2} \frac{1}{\rho \sqrt{1 + x^2/\rho^2}} \frac{N}{L} dx. \quad (7)$$

$$H = \frac{I N}{2 L} \int_{x-L/2}^{x+L/2} \frac{dx}{\rho \sqrt{1 + x^2/\rho^2}}. \quad (8)$$

$$H = \frac{I N}{2 L} \frac{x}{\rho \sqrt{1 + x^2/\rho^2}} \Big|_{x-L/2}^{x+L/2}. \quad (9)$$

$$H = \frac{I N}{2 L} \left[\frac{X + 1/2 L}{\rho^2 + (X + 1/2 L)^2} - \frac{X - 1/2 L}{\rho^2 + (X - 1/2 L)^2} \right]. \quad (10)$$

Daraus ergeben sich die Grenzfälle für

- das Innere einer langen, engen Spule ($1/2 L \gg X, 1/2 L \gg \rho$):

$$H = \frac{NI}{L}, \quad (11)$$

- das Ende einer langen, engen Spule ($X = 1/2 L, L \gg \rho$):

$$H = \frac{NI}{2L}. \quad (12)$$

7 Elektronen im Hochvakuum und in Festkörpern

7.1 Lorentz-Kraft

Die Kraft auf eine elektrische Ladung hängt nicht nur von den Ortskoordinaten ab, sondern nach Kap. 2 auch von der Geschwindigkeit der Ladung. Wir führten dort die LORENTZ-Kraft ein, die aus zwei Komponenten besteht, die wir als elektrisches Feld und als magnetische Flußdichte, als Vektor des magnetischen Feldes, auch als Induktion bezeichnen. Im *SI*-System hat die Einheit Volt sec/m²:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.1)$$

Diese Gleichung ist von außerordentlich großer Bedeutung. Als erstes wollen wir uns ansehen, was die Kreuzproduktbildung für Folgen auf die Energieaufnahme hat. Die kinetische Energie der Elektronen ist

$$E_{\text{kin}} = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \quad (7.2)$$

Ihre zeitliche Änderung berechnet sich nach

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = m \cdot \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (7.3)$$

Setzen wir jetzt (7.1) in (7.3) ein,

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (7.4)$$

sehen wir, daß die Energieänderung Null sein muß, weil der Produktvektor aus \mathbf{v} und $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ senkrecht auf seinen Komponenten steht. Folglich ist das innere Produkt aus \mathbf{v} und $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ senkrecht auf ihr stehenden Kreuzproduktes Null. Das geht aber nur, wenn der Betrag von \mathbf{v} stehenbleibt. Also darf sich nur seine Richtung ändern. Wenn aber die zeitliche Änderung von \mathbf{v} , das ist $\dot{\mathbf{v}}$, auf der Geschwindigkeit \mathbf{v} senkrecht steht, kann es sich bei der durch das Magnetfeld erzeugten Veränderung der Geschwindigkeit nur um die Kreisbewegung handeln: die LORENTZkraft wirkt als Zentripetalkraft.

7.2 Braunsche Röhre

Elektronen werden in einer BRAUNschen Röhre durch eine Glühkathode erzeugt, in einem negativ geladenen WEHNELT-Zylinder zu einem scharfen Strahl gebündelt, auf eine Lochanode beschleunigt und durch zwei um 90° zueinander gedrehte Plattenkondensatoren abgelenkt. Nach einem kräftefreien Flug kommen die Elektronen auf einem Szintillationsbildschirm an und erzeugen dort Lichtblitze (Abb. 7.1).

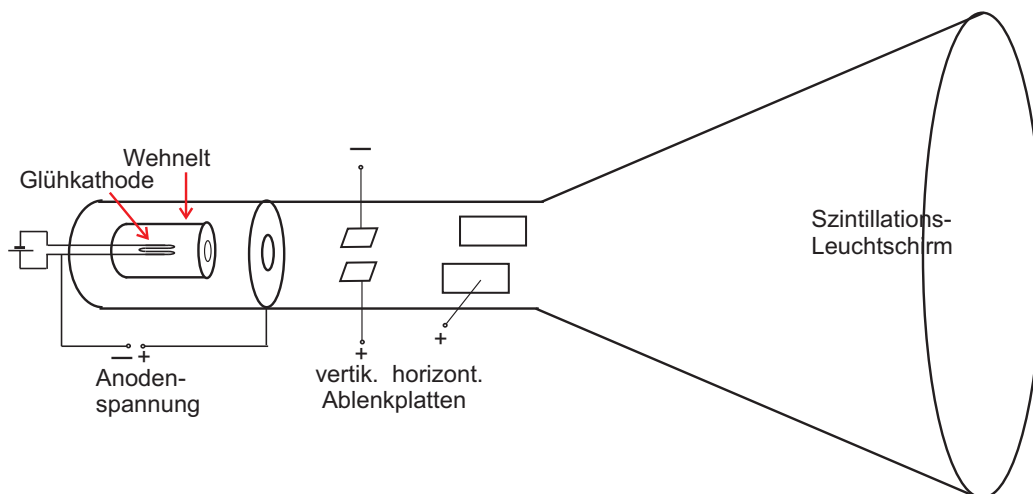


Abb. 7.1. Zu der BRAUNschen Röhre. Elektronen benötigen zur Ausbreitung Hochvakuum, sonst werden sie durch Stöße beeinflusst (abgelenkt oder absorbiert). Durch das elektrische Feld der Ablenkplatten werden die Elektronen beeinflusst; sie fliegen Richtung positive Platte.

7.3 Die spezifische Ladung e_0/m_e

Nach Abb. 7.2 in einer Glühkathode erzeugte und durch die zwischen Kathode und Anode anliegende Spannungsdifferenz U_0 beschleunigte Elektronen würden durch ein Loch in der Anode geradlinig weiterfliegen. Werden sie jedoch durch ein senkrecht zur Zeichenebene liegendes Magnetfeld der Stärke B abgelenkt, bewegen sie sich auf Kreisbahnen, aus deren Radius wir das spezifische Ladungsverhältnis e_0/m_e errechnen können:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = e_0 U \Rightarrow v = \sqrt{2U \frac{e_0}{m_e}}, \quad (7.5.1)$$

$$Be_0 v = m_e \frac{v^2}{r}, \quad (7.5.2)$$

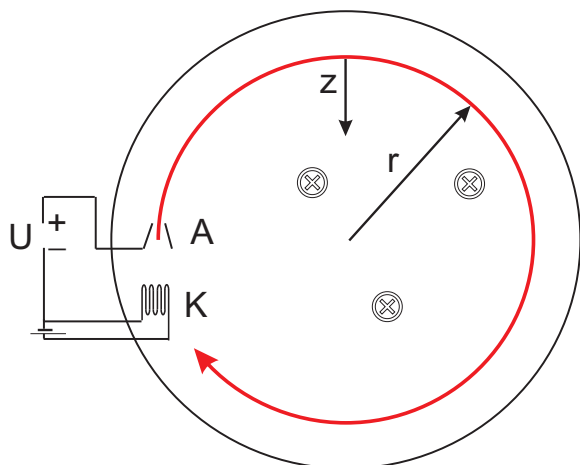


Abb. 7.2. In einer WEHNELTröhre werden bei niedrigen Drücken (typisch 1 – 10 Pa) aus einer Glühkathode Elektronen erzeugt und zur Anode beschleunigt. In einem Magnetfeld werden sie auf Kreisbahnen geführt. Beim Stoß auf Restgasmoleküle erzeugen sie Strahlung.

woraus durch Einsetzen die spezifische Elektronenladung

$$\frac{e_0}{m_e} = \frac{2U}{B^2 r^2} \quad (7.6)$$

folgt.

7.4 Elektronenmikroskop

Ein aus einer Kathode austretender Elektronenstrahl wird durch einen negativ geladenen WEHNELT-Zylinder, der wie ein Kondensator in einem optischen Mikroskop wirkt, fokussiert und durch ein elektrostatisches System (Erfinder: BRÜCHE und MAHL bei der AEG) oder durch ein elektrodynamisches System (Erfinder: RUSKA und v. BORRIES bei Siemens) über eine Probe gerastert: *Raster-Elektronenmikroskop*. Die Linsenfelder sind äußerst schwierig zu berechnen, und damit auch die Trajektorien der Elektronen. Für den einfachsten Fall einer langen magnetischen Linse ergibt sich eine Trajektorie, die als aus zwei Komponenten zusammengesetzt gedacht werden kann: eine Komponente parallel zum magnetischen Feld (kräftefrei) und eine senkrecht zum magnetischen Feld (LORENTZ-Kraft), wobei die Kreisfrequenz der Rotation von der Geschwindigkeit der Elektronen vor Eintritt ins Magnetfeld unabhängig ist (Abb. 7.3):

$$\mathbf{L} = \mathbf{z} \Rightarrow -e_0 \times = m_e \omega^2 \quad (7.7)$$

Sei der Eintrittswinkel zum Magnetfeld φ , dann ist die Parallelkomponente $v_{\parallel} = v \cos \varphi$, die der orthogonalen Komponente $v_{\perp} = v \sin \varphi$. Die Trajektorie wird dann eine Schraubenlinie, und die Zeit, die für einen Umlauf erforderlich ist, bis das Elektron also wieder die gleiche Flußdichte erfährt, ist

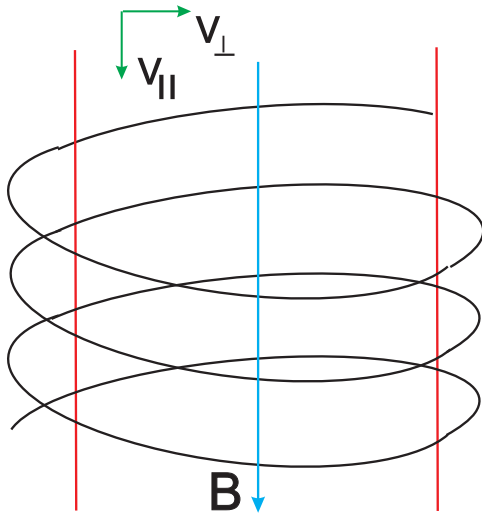


Abb. 7.3. In einem magnetischen Feld erfährt eine bewegte Ladung Kräfte. Die Flugbahn ist eine Spirale, deren Geschwindigkeit in eine Komponente parallel zum Magnetfeld und eine Komponente senkrecht dazu aufgespalten werden kann.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{e_0}{m_e} B} \quad (7.8)$$

sie ist von der Eintrittsneigung unabhängig! Das heißt aber, daß alle Elektronen, die vom Eintrittspunkt unter verschiedenen Winkeln die magnetische Linse durchlaufen, dennoch zur gleichen Zeit die gleiche Kraftlinie, auf der die Quelle liegt, wieder schneiden. Dieser Schnittpunkt ist vom Eintrittspunkt um das Produkt aus Parallelgeschwindigkeit $v_{\parallel} = v \cos \varphi$ und Umlaufzeit τ entfernt:

$$s = v_{\parallel} \tau = \frac{2\pi v \cos \varphi}{\frac{e_0}{m_e} B}, \quad (7.9)$$

was für kleine φ

$$s = v \tau = \frac{2\pi v}{\frac{e_0}{m_e} B}, \quad (7.10)$$

ergibt. Die Elektronen sind also im Abstand s fokussiert worden (Abb. 7.4).

Je höher die Energie der Elektronen, desto besser die Fokussierung, weil die Fokallänge mit der Energie variiert — und damit auch ihre Unschärfe, das sog. „Blurring“ $\Delta E / \langle E \rangle$ und daraus resultierende Fluktuationen. Daher sind üblicherweise Beschleunigungsspannungen von einigen hundert kV üblich. Seit etwa zwanzig Jahren gibt es aber auch sog. *Niederspannungs-REMs*, in denen die Beschleunigungsspannung nur mehr einige zehn kV beträgt. Der Vorteil ist, daß man damit leichter isolierende Strukturen, wie etwa organische Gewebe untersuchen kann, der Nachteil die deutlich reduzierte Auflösung.

Dieses Fokussierungsproblem wurde von BAUER Mitte der 1990iger Jahre gelöst [2, 3]: Eine eher konventionelle Hochenergie-Elektronenoptik wird dabei mit einer speziellen Objektivlinse kombiniert, die die einfallenden Elektronen auf den letzten

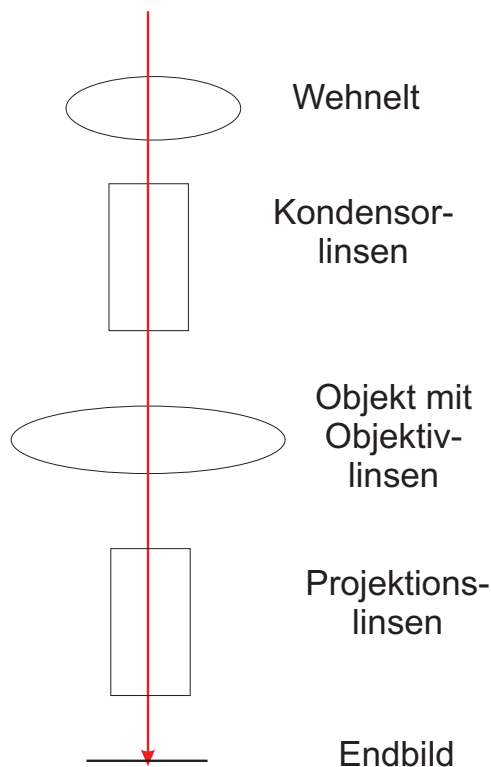


Abb. 7.4. Zur Funktionsweise eines Elektronenmikroskops. Das entstehende Bild wird üblicherweise auf einen Szintillationsschirm projiziert und mit modernen Scannern, meist als JPG-File, direkt digitalisiert.

mm verlangsamt, bevor sie die Probenoberfläche erreichen, und entsprechend die abgestrahlten Elektronen, die die Oberfläche verlassen, bevor sie stark fokussiert werden. Die Auflösung wird dadurch auf typisch 35 \AA begrenzt.

7.5 Halleffekt

In Metallen fließen bei Anlegen eines elektrischen Feldes Elektronen, die negativ geladen sind, in Halbleitern entweder Elektronen oder Defektelektronen (Löcher). In welche Richtung fließt ein elektrischer Strom durch einen Leiter? Wie aus dem differentiellen OHMSchen Gesetz $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ersichtlich, fließt der Strom immer in Richtung des Feldes. Dies ist mit der Formel $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ nur dadurch in Einklang zu bringen, indem wir feststellen, daß das Vorzeichen der Ladung auch das Vorzeichen der Geschwindigkeit sein muß:

$$\text{sign}(\rho) = \text{sign}(v) \quad (7.11)$$

Da aber Ströme in Abhängigkeit ihres Ladungsvorzeichens durch ein Magnetfeld in entgegengesetzte Richtungen abgelenkt werden, entsteht eine Erhöhung der Dichte der Majoritätsträger immer an derselben Elektrode, entweder \oplus für Defektelektronen

oder \ominus für Elektronen. Diese Ladungstrennung findet solange statt, bis das dadurch entstandene Feld, der Gradient der HALL-Spannung, gleich der LORENTZ-Kraft ist:

$$L = q \cdot \quad (7.12)$$

In Abb. 7.5 ist dieser Effekt qualitativ dargestellt: Zwischen zwei Elektroden ist ein Silberstreifen gespannt; die Äquipotentiallinien laufen senkrecht zur Stromrichtung. Beispielsweise befinden sich die Punkte A und C auf gleichem Potential. Wird nun senkrecht zum Silberstreifen ein Magnetfeld angelegt (Richtung in die Zeichenebene hinein), dann werden Elektronenströme, die von rechts nach links fließen, durch die LORENTZ-Kraft in Richtung nach A abgelenkt (Abb. 7.5).

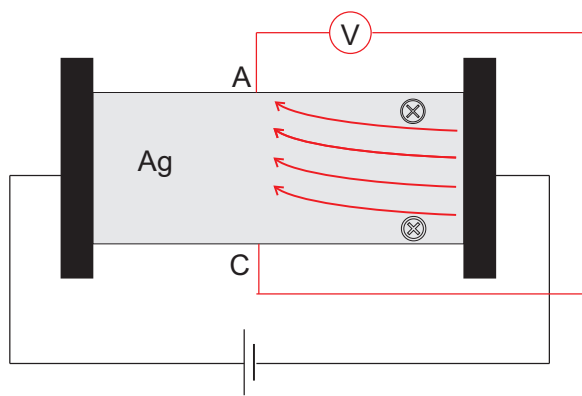


Abb. 7.5. In einem magnetischen Feld erfahren Ströme eine Ablenkung, die zu einer Ladungsseparation und damit zum Aufbau einer Spannung führt, der sog. HALL-Spannung, hier gezeigt für Elektronen in einem typischen Metall.

In Halbleitern, aber auch Halbmetallen wie Bismuth, können auch positive Ladungen (sog. Defektelektronen oder Löcher) fließen, und zwar von links nach rechts. **Beide Ladungsträgersorten werden daher in Richtung A abgelenkt.** Deswegen kann durch die Polarität der Elektrode A entschieden werden, ob es sich um einen n - oder p -Typ handelt (Abb. 7.6).

Die HALL-Spannung ergibt sich aus dem Linienintegral über das Feld

$$U_H = \int_0^l d \quad (7.13)$$

für l den Abstand der Elektroden, an der senkrecht dazu die Strombewegung durch ein äußeres Feld stattfindet. Ist die Dicke des Substrats d , dann ist die Stromstärke durch das äußere Feld $I = jA = jld$, und aus (7.13) errechnet sich mit (7.12) bei linearem Gradienten

$$q \frac{U_H}{l} = q \frac{IB}{ne_0 l d} \vee U_H = \frac{IB}{ne_0 d}. \quad (7.14)$$

$\frac{1}{ne_0}$ hat je nach Typ unterschiedliches Vorzeichen und wird als HALL-Konstante tabelliert (s. Tab. 7.1). In dieser Tabelle ist auch die Beweglichkeit aufgeführt, die einen Zusammenhang zwischen der Driftgeschwindigkeit und dem äußeren Feld darstellt:

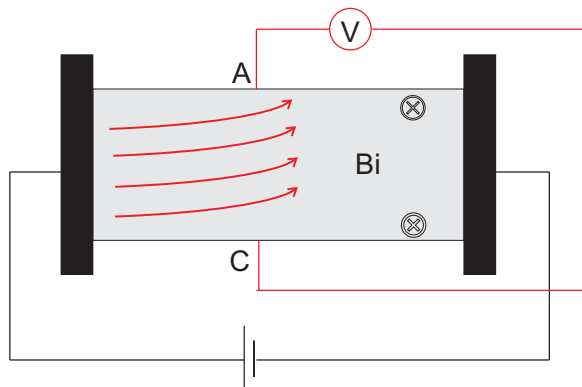


Abb. 7.6. In Bismuth oder p -Halbleitern werden Defektelektronen im elektrischen Feld bewegt. Diese bewegen sich, bezogen auf die Elektronen, in entgegengesetzter Richtung und werden daher von einem magnetischen Feld in dieselbe Richtung abgelenkt wie die Elektronen. Die sich an der Elektrode A kumulierende Ladung hat aber jetzt das andere Vorzeichen.

$$= \mu \quad . \quad (7.15)$$

Tabelle 7.1. HALL-Konstanten und HALL-Beweglichkeiten für einige Metalle bei Raumtemperatur.

Metall	R [$10^{10} \text{ m}^3/\text{Coul}$]	μ [$\text{m}^2/\text{V sec}$]
Ag	-0,84	0,0056
Al	-0,30	0,0012
Na	-2,50	0,0053
Zn	+0,3	0,0060
Cd	+0,6	0,0080

7.6 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 7.1 Ein 1 m langer Kupferdraht mit einem Querschnitt von 1 mm^2 werde von einem Strom von 1 A durchflossen. Unter der Annahme, daß jedes Cu-Atom genau ein Elektron zur Elektrizitätsleitung freistellt: wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen?

Lösung.

$$n = \frac{8,9}{63,5} \cdot N_A = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ Atome.} \quad (1)$$

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{ne_0v}{s} \Rightarrow v = \frac{Is}{ne_0} = 0,0073 \text{ cm/sec.} \quad (2)$$

Aufgabe 7.2 Zwischen den beiden Elektroden einer Kathodenstrahlröhre, an denen eine Spannung von 5 000 V liegt, werden Elektronen mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beschleunigt. Nach dem Passieren der Lochanode (Gitter) durchlaufen sie ein senkrecht zu ihrer Bahn stehendes homogenes Magnetfeld der Flußdichte von 10 mT. Dabei werden sie auf eine Kreisbahn gezwungen, deren Radius sich experimentell zu 2,38 cm ergibt. Bestimmen Sie mit diesen Angaben das Verhältnis der spezifischen Ladung.

Lösung.

$$e_0U = \frac{1}{2}m_e v^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2e_0U}}{m_e}. \quad (1)$$

$$F_L = F_Z : e_0vB = m \frac{v^2}{r}. \quad (2)$$

$$\frac{e_0}{m_e} = \frac{2U}{B^2 r^2}. \quad (3)$$

$$\frac{e_0}{m_e} = 1,8 \cdot 10^8 \text{ Coul/g.} \quad (4)$$

Aufgabe 7.3 Ein stromdurchflossener Halbleiter wird senkrecht zur Stromrichtung in ein Magnetfeld gebracht. Bestimmen Sie die zwischen den Punkten *A* und *B* auftretende HALL-Spannung, bei der Stromdichte *j* und der Flußdichte *B* (Abb. 7.1)!

Lösung. Auf die bewegten Ladungsträger wirkt senkrecht zum Magnetfeld und zur Stromrichtung eine Kraft, die zum Ladungstransport in zwei Richtungen, je nach Polarität der Ladungsträger, Anlaß gibt. Durch diese Ladungsverschiebung entsteht ein elektrisches Feld *E*, und das Potential $U_{A,B} = Ed$ kann gemessen werden:

$$e_0 = e_0 [\times]; \quad (1)$$

da die Stromdichte definiert ist nach

$$= \rho = e_0 n, \quad (2)$$

mit *n* der Ladungsträgerdichte, ist auch

$$= \frac{\times}{e_0 n}. \quad (3)$$

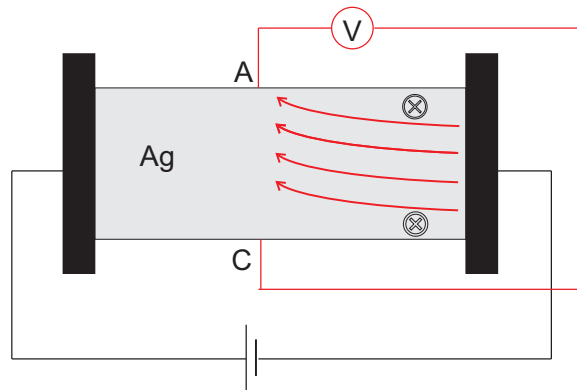


Abb. 7.7. Zum HALL-Effekt.

Für das Potential, eben die HALL-Spannung, gilt dann

$$U_{A,B} = U_H = \frac{jB}{e_0 n} d = R_H j B d \quad (4)$$

mit R_H der HALL-Konstanten. Anhand der HALL-Spannung kann man folglich die Dichte der Ladungsträger messen. Die Polarität von U gibt Aufschluß über die Polarität der Ladungsträger.

Aufgabe 7.4 Warum spielt der HALL-Effekt zur Bestimmung der Elektronendichte bei Metallen keine Rolle?

Lösung. Der HALL-Koeffizient $R_H = 1/(e_0 n)$ ist für alle Metalle wegen der sehr hohen Elektronendichten viel zu klein. Daher wird der Effekt erst bei sog. Halbmetallen wie Bismut, ganz besonders aber bei Halbleitern von großer Bedeutung.

8 Induktionserscheinungen

8.1 Spannungserzeugung

8.1.1 Gesetze von Faraday und Lenz

FARADAY machte 1831 die Entdeckung, daß in einer geschlossenen Leiterschleife ein elektrischer Strom fließt, wenn diese Schleife derart in einem Magnetfeld bewegt wird, daß sich der magnetische Fluß durch die Schleife ändert. Für ein homogenes Magnetfeld ist der Feldfluß durch eine senkrecht zu den Feldlinien stehende Fläche A (Abb. 8.1):

$$\Phi_{\text{magn}} = \dots \quad (8.1)$$

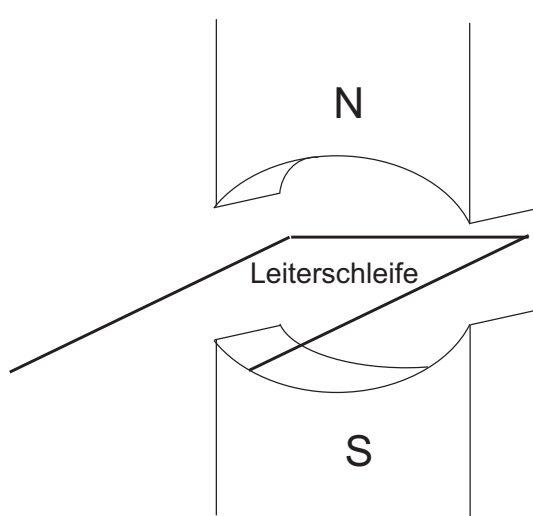


Abb. 8.1. Leiterschleife (Läufer) im Magnetfeld. Es wird beim Drehen im Magnetfeld eine sinusförmige Spannung im Anker induziert.

Liegt die Fläche schief zu den Feldlinien, ist der Fluß Φ

$$\Phi_{\text{magn}} = bA \cos(\dots). \quad (8.2)$$

Der Beitrag eines einzelnen Flächenelements dA zum Fluß beträgt

$$d\Phi_{\text{magn}} = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \Rightarrow \Phi_{\text{magn}} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} dA. \quad (8.3)$$

Dabei erstreckt sich das Integral über die gesamte vom Leiter umschlossene Fläche. Die Einheit des magnetischen Flusses ist

$$[\Phi] = [B][A] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \text{m}^2 = \text{Vs}. \quad (8.4)$$

Durch den Induktionsvorgang wird primär eine Potentialdifferenz erzeugt, die erst sekundär den Induktionsstrom hervorruft. Dabei wechselt der Strom bei einem vollständigen Umlauf der Leiterschleife zweimal seine Richtung, was man als *Wechselstrom* bezeichnet (Abb. 8.2).

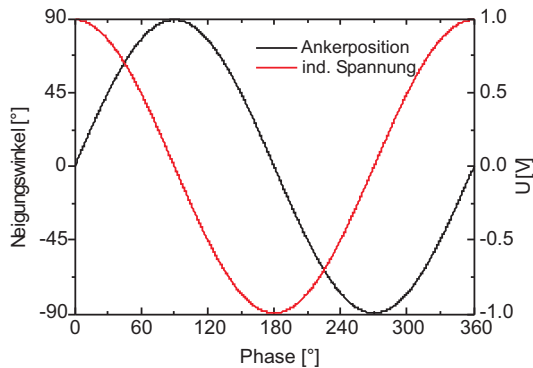


Abb. 8.2. Die im Läufer induzierte Spannung ändert bei einem vollständigen Umlauf ihre Polarität zweimal: Wechselstrom.

Damit lautet das FARADAYSche Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}. \quad (8.5)$$

Dies ist die sog. Differentialform, in Integralform sehen wir den sog. *Spannungstoß*:

$$\int_{t_1}^{t_2} U_{\text{ind}} dt = -(\Phi_{t_2} - \Phi_{t_1}). \quad (8.6)$$

Seine Größe hängt offenbar nur von der Stärke des magnetischen Flusses zu Beginn und zu Ende der betrachteten Zeitspanne ab. Dabei ist der Induktionsstrom einer Linksschraubebewegung zugeordnet. Der Strom in dem Draht ring als Folge der induzierten Spannung baut nämlich nach $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + (\partial \mathbf{D} / \partial t = 0)$ ein magnetisches Wirbelfeld auf, das so gerichtet ist, daß die ursprüngliche Flußrichtung wiederhergestellt wird:

Satz 8.1 *Das magnetische Feld, das als sekundäre Erscheinung durch den induzierten Strom hervorgerufen wird, muß der Änderung des primär vorhandenen magnetischen Feldes entgegenwirken (Regel von LENZ).*¹

¹ Andernfalls würde der durch Induktion entstehende Strom die ihn verursachende Flußänderung verstärken.

Dies ist das Prinzip der Erzeugung sog. *Wechselstroms* und, in umgekehrter Richtung, das des *Elektromotors*. Im Ergebnis wird also pro Umlauf die Phase zweimal gedreht. Natürlich hat eine derartige Leiterschleife kein großes Magnetfeld. Es liegt also nahe, eine Spule zu verwenden, am besten mit einem Eisenkern, einen sog. *Anker* (Abb. 8.3.1).

Zum Zeitpunkt der Entdeckung des Wechselstroms durch FARADAY kannte man nur Gleichstromquellen, die als vorteilhaft galten. Um aus dem durch einen Dynamo erzeugten Wechselstrom jetzt Gleichstrom zu gewinnen, muß man der Änderung der Polarität nachhelfen. Dieses Problem wird mit einem sog. *Kollektor* oder Kommutator, auf deutsch Stromwender, gelöst.

8.1.2 Der Kollektor

Die Umpolung gelingt durch sog. *Kollektoren*, Schleifringen, die mechanisch durch einen Spalt separiert sind, der mit isolierendem Material gefüllt ist, und an denen die Spannungsabgriffe des Generators befestigt sind. Der am Anker angebrachte Schleifring streift über die sog. Bürsten, meist aus Graphit hergestellte Federn, wobei Wechselstrom fließt, und zwar genau eine Halbwelle lang (Abb. 8.3.2). Im Nulldurchgang erfolgt nun die Unterbrechung durch die Kollektoren, und der Stromfluß wird unterbrochen. Der Anker wird abgebremst und wir erwarten, daß er stehenbleibt. Bedingt durch seine Trägheit, dreht er sich aber noch ein Stück weiter; er ist nun aber auf der anderen Seite der Phase angekommen. Nun übernimmt die zweite Hälfte des Kollektors dieselbe Aufgabe, aber auch mit umgekehrter Polung. Damit ist die ursprüngliche Stromrichtung wiederhergestellt; die Magnetfelder stoßen sich erneut ab, und wir erhalten auch über die nächste Halbphase Gleichstrom, zerhackt zwar, aber Gleichstrom, an der oberen Bürste z. B. \oplus , an der unteren Bürste \ominus (Abb. 8.4).

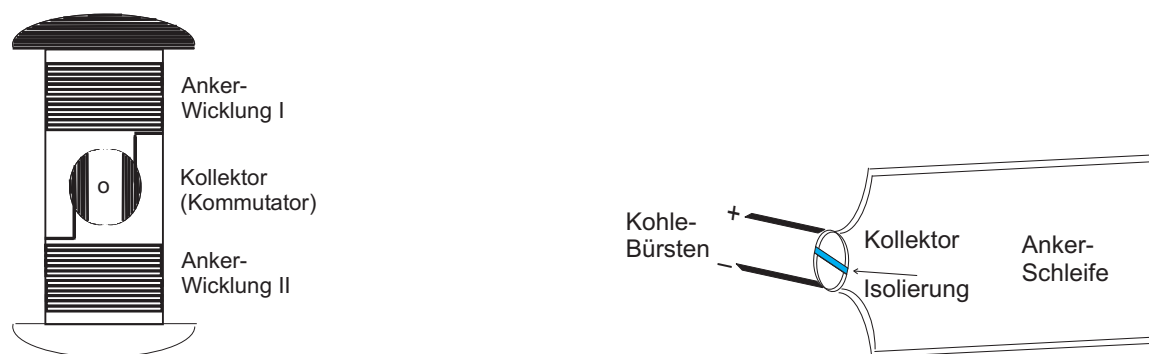


Abb. 8.3. Lks.: Der an einen Schiffsanker erinnernde Doppel-T-Läufer mit Kollektor in der Mitte. Re.: Detail eines Kollektors, der die Phase pro Umlauf zweimal dreht.

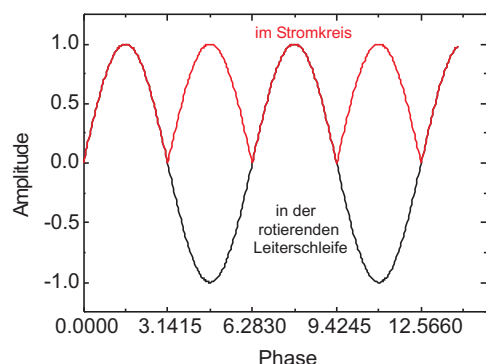


Abb. 8.4. In der rotierenden Leiterschleife wird eine Wechselspannung erzeugt, die durch den Kollektor in zwei halbe Perioden gleicher Polarität gewandelt wird.

8.1.3 Dynamo und Elektromotor

Damit haben wir alle Zutaten zusammen, um einen Generator oder Dynamo zu bauen, der in Abb. 8.5 gezeigt wird. In diesem Fall haben wir einen Gleichstrom-Dynamo gebaut, der Permanentmagneten für die Statoren verwendet.

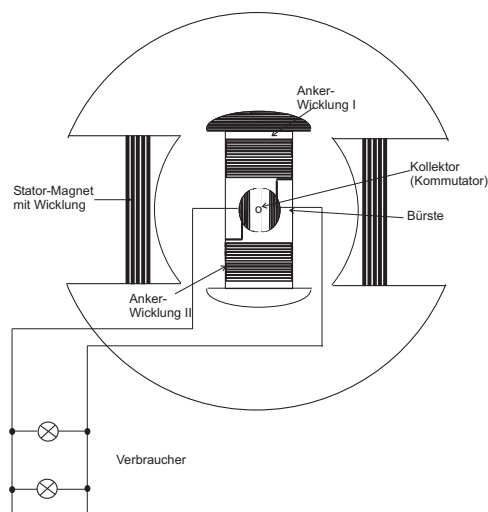


Abb. 8.5. Ein einfacher Generator zur Erzeugung von Gleichstrom mit zwei Permanentmagneten, die als Statoren bezeichnet werden. In deren Feld dreht sich der Anker.

Ein nur zweipoliger Anker hat einen ruppigen Spannungsverlauf; es liegt also als weitere Verbesserung nahe, den Phasenverlauf pro Umdrehung aufzuteilen. Das macht man mit sog. Trommelankern, die mehrere gegeneinander isolierte Subspulen auf einer Achse enthalten, so daß der Nulldurchgang bei einem Umlauf von jedem Subsystem zweimal durchschritten wird.

Wird im Falle des Generators eine Leiterschleife im Feld eines statischen Magneten gedreht und so eine Wechselspannung erzeugt, wird im Falle des Elektromotors eine mechanische Kreisbewegung durch Anlegen einer Spannung erzeugt. Dies gelingt deswegen, weil das durch den Stromfluß in der Drahtschleife sich aufbauende Magnetfeld

auf abstoßende Art mit dem Permanentmagneten wechselwirkt. Da der Wechselstrom seine Polarität während einer Periode selbst zweimal ändert, geht das sozusagen „von selbst“, aber nur bei der Netzfrequenz. Hat man es dagegen mit Gleichstrom zu tun, muß man der Änderung der Polarität auch hier mit Kollektoren nachhelfen.

8.2 3. Maxwell-Gleichung

Mit dem STOKESSchen Satz wird aus Gl. (8.5)

$$\oint_A \mathbf{d} = \int_A (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}. \quad (8.7.1)$$

Mit der Gl. (6.1) ist dann

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = U_{\text{ind}}. \quad (8.7.2)$$

Wir sehen an diesen Gleichungen, daß die Rotation des durch zeitliche Änderung der magnetischen Flußdichte erzeugten elektrischen Feldes im dynamischen Fall nun nicht mehr verschwindet. Wir hatten in Kap. 1 gesehen, daß das Voraussetzung für die Definition eines konservativen Feldes mit einer eindeutigen Potentialfunktion ist. Als Konsequenz ist die Spannung U_{ind} nur als wegabhängiges Integral über der Feldstärke berechenbar!

8.3 Gegenseitige Induktion

Ein Strom in einer Spule erzeugt ein Magnetfeld, das seinerseits in einer zweiten Spule eine Spannung induziert, solange sich das Magnetfeld ändert. Die zweite Spule soll die erste eng umschließen, außerdem sollen beide Spulen sehr lang sein. Fließt ein Strom I_1 durch die erste Spule, deren totale Windungszahl N_1 und Länge L_1 ist, ist die Größe des erzeugten Magnetfelds B_1 gegeben durch

$$B_1 = \mu_0 N_1 \frac{I_1}{l_1}. \quad (8.8)$$

Beträgt die Fläche A_1 für Spule 1 und A_2 für Spule 2, ist der Fluß Φ_2 in einer Windung der Spule 2, erzeugt durch das Magnetfeld B_1 der ersten Spule, gegeben durch

$$\Phi' = A_2 B_1. \quad (8.9)$$

Da die Spule 2 N_2 Windungen hat, ist der Fluß durch diese N_2 Windungen

$$\Phi_2 = N_2 \Phi' = N_2 A_2 B_1 = \mu_0 \cdot A_2 \cdot N_1 \cdot N_2 \frac{I_1}{l_1}. \quad (8.10)$$

Das ist das Prinzip des Transformators.

8.3.1 Gegeninduktivität

Eine Spannung U_{ind} in der Spule 2 wird dann induziert, wenn eine Änderung des Flusses Φ_2 stattfindet. Nach der Beziehung (8.10) bewirkt eine Änderung des Stromes I_1 eine Flußänderung. Für die induzierte Spannung $U_{\text{ind}}^{(2)}$ in Spule 2 erhält man also aus Gl. (8.10)

$$U_{\text{ind}}^{(2)} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{A_2}{l_1} \frac{dI}{dt}. \quad (8.11)$$

Oft führt man für den konstanten Faktor vor $\frac{dI}{dt}$ die Abkürzung L_{12} ein, die man Gegeninduktivität nennt:

$$L_{12} = \mu_0 N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{A_2}{l_1}. \quad (8.12)$$

8.3.2 Selbstinduktivität

Es wird aber auch eine Spannung U_{ind} in der Spule 1 induziert, wenn eine Änderung des Flusses Φ_1 stattfindet. Nach der Beziehung (8.10) bewirkt eine Änderung des Stromes I_1 eine Flußänderung. Für die induzierte Spannung $U_{\text{ind}}^{(1)}$ in Spule 1 erhält man also aus Gl. (8.10)

$$U_{\text{ind}}^{(1)} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 N_1 \cdot N_1 \cdot \frac{A_1}{l_1} \frac{dI}{dt}. \quad (8.13)$$

Oft führt man für den konstanten Faktor vor $\frac{dI}{dt}$ die Abkürzung L ein, die man Selbstinduktivität nennt:

$$L = \mu_0 N_1 \cdot N_1 \cdot \frac{A_1}{l_1}, \quad (8.14)$$

woraus sich für das Verhältnis der beiden induzierten Spannungen [Gln. (8.11) u. (8.13)]

$$\frac{U_{\text{ind}}^{(1)}}{U_{\text{ind}}^{(2)}} = \frac{-L}{-L_{12}} \quad (8.15)$$

ergibt, das also nur noch vom Verhältnis der beiden Induktionskoeffizienten abhängt, bei gleicher Fläche und gleicher Länge lediglich vom Verhältnis der Windungszahlen:

$$\frac{U_{\text{ind}}^{(1)}}{U_{\text{ind}}^{(2)}} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (8.16)$$

Die Einheit von L ist

$$[L] = \frac{\text{V sec}}{\text{A}} = 1 \text{ Henry} : \quad (8.17)$$

Eine Spule hat die Selbstinduktivität 1 Henry, wenn durch die Änderung der Stromstärke um 1 A pro Sekunde eine Spannung von 1 V induziert wird. Nach der LENZschen Regel hemmt die Selbstinduktion jede Stromänderung, sowohl beim Ein- wie beim Ausschalten eines Stromkreises.

8.4 Stromkreis mit Induktivität

Zur Berechnung des Stromverlaufs in Abhängigkeit von der Zeit gehen wir vom OHMSchen Gesetz aus. Der Strom I in diesem Kreis ist bestimmt durch das Verhältnis (Abb. 8.6)

$$I = \frac{\text{Summe aller im Kreis vorhandenen Spannungen}}{\text{Ohmscher Widerstand}}. \quad (8.18)$$

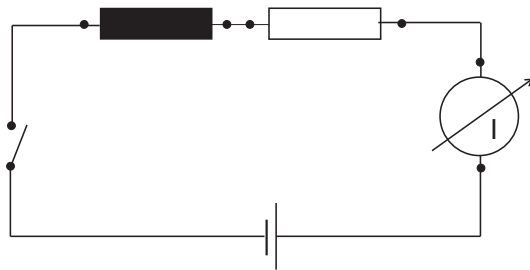


Abb. 8.6. Stromkreis mit Induktivität und OHMSchem Widerstand.

Die Summe der Spannungen setzt sich zusammen aus der äußeren angelegten Spannung U_0 und der induzierten Spannung U_{ind} in der Spule L . Damit wird

$$I = \frac{U_0 + U_{\text{ind}}}{R} = \frac{U_0 - L\dot{I}}{R} \Rightarrow U_0 = RI + L\dot{I}; U_0 = \text{const.} \quad (8.19.1)$$

$$\frac{U_0}{R} = I + \frac{L}{R} \dot{I}. \quad (8.19.2)$$

$$I_0 = I + \frac{L}{R} \dot{I}. \quad (8.19.3)$$

$$\frac{dI}{I_0 - I} = \frac{R}{L} dt. \quad (8.19.4)$$

$$-\ln(I_0 - I) = \frac{R}{L} t + \text{const.} \quad (8.19.5)$$

$$-\ln \frac{U_0}{R} - I = \frac{R}{L} t + \text{const.} \quad (8.19.6)$$

Da für $t = 0$ der Strom $I = 0$ ist, folgt für den Verlauf des Stroms in Abhängigkeit von der Zeit:

$$-\ln I_0 = 0 + \text{const} \Rightarrow \text{const} = -\ln I_0. \quad (8.20.1)$$

$$-\ln(I_0 - I) = \frac{R}{L}t - \ln I_0 \Rightarrow \ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L}t. \quad (8.20.2)$$

$$I_0 - I = I_0 \exp -\frac{R}{L}t. \quad (8.20.3)$$

$$I = I_0 - I_0 \exp -\frac{R}{L}t \Rightarrow I = I_0 \left(1 - \exp -\frac{R}{L}t\right). \quad (8.20.4)$$

Es wird also nicht sofort der Endwert $I = U_0/R$ erreicht, sondern von Null an mit einer endlichen Anstiegsgeschwindigkeit. Für große t wird $\exp(-Rt/L) \rightarrow 0$, und der Strom hat den Endwert erreicht.² Auch beim Abschalten eines Stromkreises mit einer Induktivität erreicht der Strom nicht sofort den Wert Null. Da man nach dem Abschalten der äußeren Spannungsquelle U_0 als einzige Spannung im Stromkreis noch die induzierte Spannung U_{ind} hat, wird die DGl (8.19.1) einfacher:

$$L \frac{dt}{dt} + RI = 0 \Rightarrow I(t) = I_0 \exp -\frac{R}{L}t, \quad (8.21)$$

wobei der Spulenstrom vor dem Ausschalten I_0 war.

8.5 Energie im Magnetfeld

Die Energie des durch Gl. (8.21) beschriebenen abklingenden Stroms kann nur aus dem Magnetfeld der Spule L stammen (L des OHMSchen Widerstandes klein gegen L_{Spule}). Nach Gl. (6.9.2) wird in dem Widerstand R bis zum vollständigen Abklingen des Stroms die JOULEsche Wärme

$$W = \int_0^{\infty} I^2 \cdot R dt \quad (8.22)$$

entwickelt. Setzt man für den Strom I den Wert von Gl. (8.21) in Gl. (8.22) ein, ergibt sich

$$W = \int_0^{\infty} I_0^2 \exp \frac{-2R}{L}t \cdot R dt \Rightarrow W = R \cdot \frac{L}{2R} I_0^2 \exp \frac{-2R}{L}t \Big|_0^{\infty}. \quad (8.23.1)$$

$$W = \frac{1}{2} L I_0^2. \quad (8.23.2)$$

Dieser Energiebetrag ist in dem Stromkreis mit der Selbstinduktivität L enthalten. Beim Einschalten muß folglich dieser Energiebetrag aus der Stromquelle in den

²Bei Elektromagneten, die eine große Selbstinduktivität besitzen, kann der Stromanstieg bis zum Erreichen eines konstanten Spulenstromes einige Minuten in Anspruch nehmen.

Stromkreis hineintransportiert worden sein. Dieser Energiebetrag ist gleich der vom Strom I gegen die induzierte Spannung verrichteten Arbeit:

$$W = - \int_0^{\infty} I \cdot U_{\text{ind}} dt = \int_0^{\infty} IL dI = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2} LI_{\infty}^2. \quad (8.24)$$

Die Trägheit dieses Energietransports beim Ein- und Ausschalten ist umso größer, je größer die Selbstinduktivität L ist.

8.6 Transformator

Zwei Spulen der Windungszahl N_1, L_1 (Primärkreis) und N_2, L_2 (Sekundärkreis) umschließen einen gemeinsamen Magnetfluß, der durch einen hochpermeablen Eisenkern gebündelt wird (Abb. 8.7). Dann ist bei reiner Induktanz der beiden Spulen ($R_{\text{ges.}} = \omega L$) bei offenem Sekundärkreis nach der LENZschen Regel:

$$U_1 = N_1 \dot{\Phi} = -U_2 = N_2 \dot{\Phi} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2}. \quad (8.25)$$

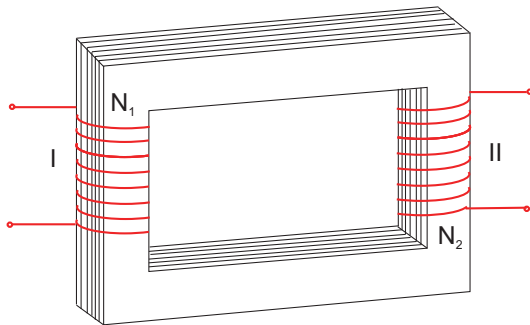


Abb. 8.7. Transformator mit Primär- (I) und Sekundärspule (II), hier dargestellt mit dem Wirkungsgrad eines Politikers.

Was passiert? Der durch die Wechselspannung auf der Primärseite des Transformators erzeugte oszillierende magnetische Fluss im Eisenkern induziert auf der Sekundärseite des Transformators wiederum eine Spannung (Spannungstransformation). Es handelt sich also um eine doppelte Induktion: Einmal Erzeugung eines magnetischen Flusses im Kern, dann Erzeugung eines Spannungstoßes im Sekundärkreis, der wiederum nach dem AMPÉRESchen Gesetz *causa* für einen Wechselstrom, aber jetzt in der Sekundärwicklung, ist.

Was ist der Vorteil gegenüber den innig verbundenen Spulen, die wir im Abschn. 8.3 betrachtet haben? Durch den in dem Spulensystem befindlichen Kern aus ferromagnetischem Material hoher Permeabilität aus Weicheisen können hohe magnetische Flußdichten und damit hohe Spannungen transformiert werden. Damit bleiben die durch Stromfluß in den Wicklungen bedingten unvermeidlichen OHMSchen Verluste klein. Für gleiches Übersetzungsverhältnis benötigt man mit einem Transformator mit Eisenkern wesentlich weniger Windungen auf den Wicklungen als mit einem Trafo ohne Eisenkern.

Was ist die Funktion der Lamellen? Wir sind an einem hohen Magnetfluß interessiert, der durch einen hochpermeablen Kern aus Weicheisen gebildet wird. Andererseits sollen die Wirbelstromverluste niedrig sein, was eben durch eine niedrige elektrische Leitfähigkeit erreicht wird. Ein Kern aus Volleisen hat eine höhere Leitfähigkeit als dieser „Sandwich“ aus Eisenblech und Lack.

8.7 Dynamoelektrisches Prinzip

Nachdem wir nun das FARADAYSche Induktionsgesetz prinzipiell erlernt und in zwei Anwendungen seine Bedeutung für die Erzeugung der Elektrizität ersehen haben, kümmern wir uns um seine erste Verbesserung.

Bei der Erzeugung von „Strom“ kam man nämlich schnell an die Grenzen, wesentlich bedingt durch den Einsatz der Permanentmagneten. Erstens sind sie sehr schwer, zweitens aber ist die Stärke des Magnetfeldes begrenzt und zudem nicht langzeitstabil. Das ist durch zwei Gründe verursacht. Zunächst sorgt die thermische Bewegung für eine chaotischere Ausrichtung der WEISSschen Bezirke, zum anderen aber ist ein absolut ruhiger Lauf der Anker im stationären Magnetfeld unmöglich. Durch diese zwangsläufig auftretenden Erschütterungen wird die magnetische Ordnung allmählich reduziert.

Ein Ausweg aus diesem Dilemma ist der Einsatz eines Elektromagneten. Dazu benötigt man als *conditio sine qua non* eine Gleichspannungsquelle. WERNER SIEMENS erkannte, daß man auf diese verzichten kann, da im Eisenkern des Elektromagneten auch beim Abschalten ein remanenter Anteil zurückbleibt, so daß bereits beim Einschalten des Generators eine kleine Induktionsspannung erzeugt wird. Wird der damit verbundene Strom nicht vollständig zum Verbraucher abgegeben, sondern zum Teil zur Erhöhung des sog. *Statorfeldes* benutzt, so kommt es schnell zu einem der Resonanz ähnlichen Effekt. Erhöht sich in einem Oszillator durch Energiezufuhr die Amplitude bei jeder Schwingung, so steigert sich auch hier die Magnetfeldstärke bei jedem Ankerumlauf. Es kommt also zur Selbsterregung des Generators (dynamoelektrisches Prinzip).³ Das aber ist kein *perpetuum mobile*, da OHMSche Verluste in den Wicklungen, vor allem aber die in die Sättigung gehende Magnetisierung den Effekt begrenzen.

Die beiden Wicklungen, die des statischen Magneten (Statorwicklung) und des dynamischen Magneten (Ankerwicklung), können nun entweder in Serie oder parallel geschaltet werden. In jenem Fall spricht man vom Hauptschluß— dies ist die von SIEMENS zunächst verwendete Methode —, in diesem vom Nebenschluß (Abb. 8.8).

Im umgekehrten Fall, also Strom hinein, haben wir Elektromotoren gebaut.

³Dieses Wort ist jedem vom Fahrraddynamo vertraut. Ausgerechnet in diesem Generator wird aber ein Permanentmagnet verwendet.

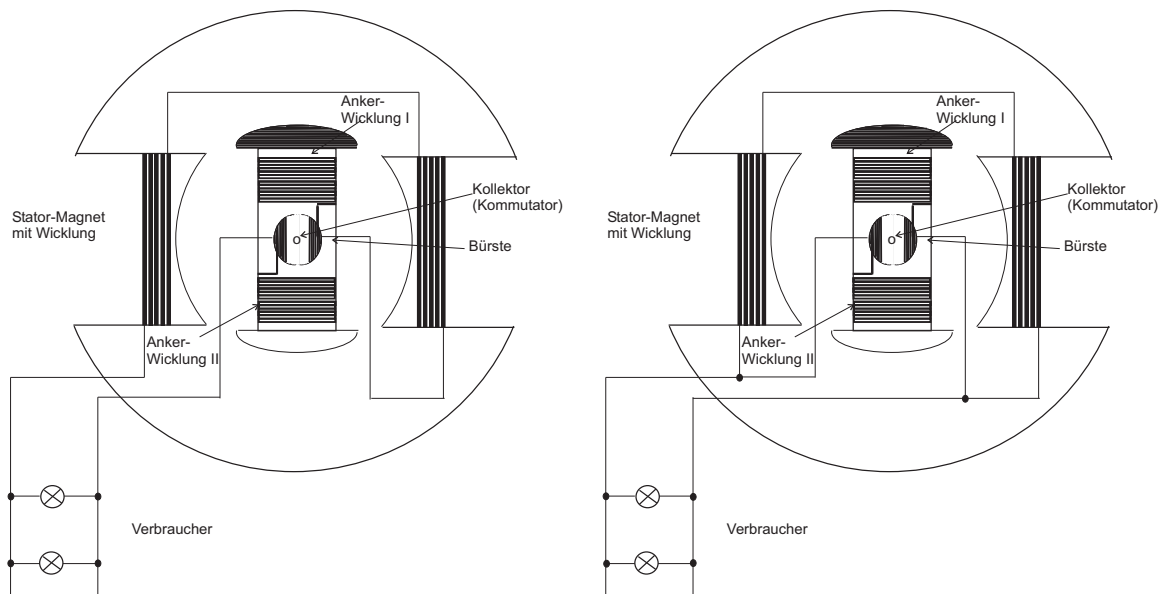


Abb. 8.8. Lks.: Ein in der Hauptstromschaltung arbeitender Dynamo (auch Hauptschluß genannt). Anker- und Feldwicklung liegen hintereinandergeschaltet im gleichen Stromkreis. Re.: Nebenschlußschaltung; Anker und Feld sind parallelgeschaltet.

8.7.1 Elektromotor

Auch hier sind die beiden Variationen Hauptschluß oder Nebenschluß möglich. Im Nebenschluß ist die Spannung an Anker und Stator gleich, im Hauptschluß ist es natürlich der Strom.

Im Hauptschluß arbeitende Motoren haben ein großes Anlaufdrehmoment, während bei im Nebenschluß arbeitenden Motoren die Drehzahl nahezu lastunabhängig ist. Nachteilig ist bei dieser Variante aber ist der hohe Leistungsverlust durch große Spulen mit hoher Wicklungszahl.

8.7.1.1 Hauptschlußmotor. Wegen des hohen Ankerstroms wird ein starkes Magnetfeld erzeugt, und nach Gl. (8.26)

$$= I \times \quad , \quad (8.26)$$

die die umgeschriebene Gl. (6.24) ist, erfährt der Anker eine große Kraft. Damit ist ein hohes Anlaufdrehmoment verbunden.

8.7.1.2 Nebenschlußmotor. Der gesamte Strom ist die Summe aus Ankerstrom und dem Statorstrom, der das Magnetfeld erregt. Aus der Gleichung

$$I = I_A + I_{\text{err}} \quad (8.27.1)$$

folgt für den Ankerstrom

$$I_A = \frac{U_A + U_{\text{ind}}}{R_A} = \frac{U_A - Blv_A}{R_A} \quad (8.27.2)$$

mit B der Flußdichte, l der Länge des Ankers und v_A seiner Geschwindigkeit, also seiner Drehzahl ($v_A = 2\pi\nu_A r_A$). Bei Belastung sinkt nun die Drehzahl, damit steigt nach Gln. (8.27) der Ankerstrom an, womit die Leistungsaufnahme nach $P = U_A I_A$ ebenfalls zunimmt \Rightarrow Damit paßt sich der im Nebenschluß arbeitende Elektromotor durch seine Leistungsaufnahme der mechanischen Belastung an.

Weil bei jeder Spannungsinduktion gleichzeitig eine Gegeninduktion ausgelöst wird, bedeutet das in der Konsequenz während des Betriebes, daß die vom Netz gelieferte am Motor anliegende Spannung nach (8.19.1) bedeutend reduziert werden kann. Beim Anschalten allerdings, insbesondere beim Nebenschlußmotor, bei dem an Anker und Feldmagneten eine gleich hohe Spannung anliegt, muß mittels eines Anlassers die Gegenspannung allmählich erzeugt werden. Beim Zurücknehmen erhöht sich die Stromstärke im Anker, damit erhöht sich das Magnetfeld, was wiederum die Rotationsgeschwindigkeit des Ankers erhöht etc.

8.8 Gleichstrom vs. Wechselstrom

Damit stand der flächendeckenden Einführung der Elektrizität nur mehr im Wege, daß die Ansammlung von Menschen, Stadt genannt, und das Vorhandensein natürlicher Kraftquellen, wie Wasserkraft, meist nicht kongruent sind. Daher wollte EDISON, der mit seiner General Electric und dem von ihr propagierten Gleichstrom im Kampf gegen TESLA und WESTINGHOUSE und ihre Firma Westinghouse, die auf das Wechselstromprinzip und damit auf die Entkopplung von Stromerzeugung und Wohn- und Arbeitsstätte setzte, zunächst obsiegte, an den Großen Seen nach Ausnutzung der Niagara-Fälle eine gigantische Stadt errichten, womit er in der Menschheitsgeschichte nicht allein steht (Abb. 8.9).

Die Meinung, Gleichstrom sei superior gegenüber Wechselstrom, war ja nicht zuletzt durch die Wasseranalogie begründet, mit der man vieles in der Elektrizität erklären kann, also Gefälle gleich Spannung, Stromstärke gleich Flußmenge *etc.* Man sagt zwar, der Strom fließe von A nach B . Tatsächlich kann er aber bei B nicht in einen wie auch immer gearteten Stromeimer abgefüllt werden, sondern er fließt immer im Kreis. So auch der Wechselstrom, der ebenfalls immer fließt und auch nie ankommt.

8.9 Betatron

Ein Transformator, dessen Sekundärwicklung durch eine Elektronenwolke, die den Feldern genauso folgen muß wie die Elektronen in einem Leiter, ersetzt ist, nennt man



Abb. 8.9. Lks.: Der erste nach dem dynamoelektrischen Prinzip arbeitende Generator von WERNER SIEMENS, wofür er geadelt wurde, steht heute im Deutschen Museum © Siemens. Re.: Prinzipskizze dieses Generators.

Betatron. Dabei wird die negative Ladungswolke durch ein magnetisches Führungsfeld auf einer Kreisbahn gehalten. So wirkt ein Magnetfeld nach

$$\mathbf{L} = e_0 \times \quad (8.28)$$

nur zu einer Fläche senkrecht zu sich selbst und verändert die Energie eines Elektrons, obwohl die LORENTZkraft senkrecht zur Geschwindigkeit steht. Deshalb muß die Arbeit, wie jede Arbeit einer beliebigen zentripetalen Kraft, Null sein. Ein Elektron bildet jedoch einen Kreisstrom, der einem magnetischen Dipol entspricht, dessen Energie

$$U_{\text{magn.}} = - \text{magn.} \cdot \quad (8.29)$$

ist. Im Laufe der zeitlichen Änderung des Magnetfeldes auf den Wert $B_z = B$ wirkt auf ein Elektron die in Bewegungsrichtung liegende Komponente des elektrischen Feldes ($\langle \rangle$ sei die mittlere magnetische Flußdichte innerhalb des Kreises):

$$\nabla \times \quad = - \frac{\partial \langle \rangle}{\partial t} \Rightarrow \quad (8.30)$$

$$\int_A \nabla \times \quad \cdot d \quad = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \langle \rangle \cdot d \quad \Rightarrow \quad (8.31)$$

$$\cdot d \quad = - \quad d \quad \cdot \frac{\partial \langle \rangle}{\partial t}. \quad (8.32)$$

- STOKESScher Satz gibt die Umwandlung eines Linien- oder Umlauf-Integrals in ein Oberflächenintegral an.
- spielt im rechten Integral die Fläche die Rolle eines Parameters, deswegen darf man d vorziehen.

Da es sich um eine Kreisbahn handelt, ist

$$2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial \langle \rangle}{\partial t} \Rightarrow = -\frac{r \partial \langle \rangle}{2 \partial t}. \quad (8.33)$$

Das Elektron wird folglich mit der elektrischen Kraft e_0 beschleunigt (Abb. 8.10):

$$= m_e \frac{d}{dt} \text{ magn.} = -e_0 = \frac{r e_0}{2} \frac{\partial \langle \rangle}{\partial t}, \quad (8.34)$$

so daß der dem Elektron senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung additiv zugeführte Impulsbetrag

$$m_e \Delta \text{ magn.} = \frac{r e_0}{2} \Delta \langle \rangle \quad (8.35)$$

ist. Weil magn. parallel zur z -Achse steht und nach der Definition der LORENTZkraft

$$\text{magn.} \perp \perp L, \quad (8.36)$$

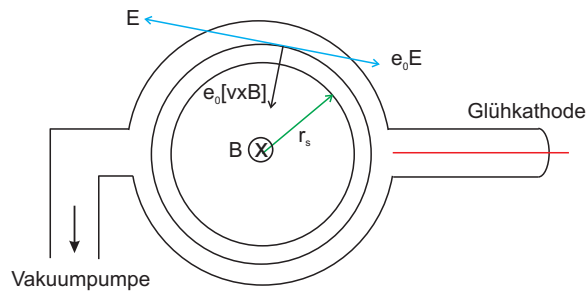


Abb. 8.10. Betatron: Trafo mit Elektronen als Sekundärwicklung. Das Magnetfeld zeigt in die Zeichenebene hinein.

kann man die induzierte Geschwindigkeit in Vektorform hinschreiben:

$$\text{magn.} = \gamma \langle \rangle \times , \quad (8.37)$$

wobei γ das sog. *magnetogyrische* oder *gyromagnetische* Verhältnis ist. Das Magnetfeld ruft eine zusätzliche Präzession mit der Winkelgeschwindigkeit

$$= \gamma \langle \rangle \quad (8.38)$$

hervor. Das Elektron wird durch das induzierte elektrische Feld beschleunigt, damit erhöht sich seine (transversale) Geschwindigkeit. Damit steigt die von ihm ausgeübte Zentrifugalkraft. Soll das Elektron auf eine stabile Kreisbahn gezwungen werden, muß die Zentrifugalkraft gleich der LORENTZ-Kraft sein:

$$\frac{m_e v^2}{r} = e_0 v B_{\text{Orbit}} \Rightarrow m_e v = e_0 r B_{\text{Orbit}}. \quad (8.39)$$

Durch Vergleich der Gln. (8.35) und (8.39) sieht man, daß

$$B_{\text{Orbit}} = \frac{1}{2} \langle B \rangle \quad (8.40)$$

sein muß:

- Die Flußdichte muß derart abfallen, daß sie am Sollkreis nur die Hälfte des Mittelwerts innerhalb dieser Kreisfläche hat.
- In einem dynamischen Bild nimmt der Impuls des Elektrons mit $\langle B \rangle$ zu, wobei deren Rate doppelt so hoch sein muß wie die zeitliche Zunahme am Sollkreis selbst. Dies erreicht man durch konische Formgebung der Magnetblöcke.

Die maximal erreichbare Radialbeschleunigung der Elektronen ist wegen starker Synchrotronstrahlung bei hoher Beschleunigung eine Grenze gesetzt ($E \leq 100$ MeV).

8.10 Haushaltsgeräte

Unser ganzer Komfort ist auf dem Induktionsgesetz aufgebaut. Den Elektromotor haben wir bereits gewürdigt. Hier folgen noch einige Geräte.

8.10.1 Klingel

Zunächst wurde die Klingel mit Gleichstrom betrieben. Das ist in den Abb. 8.11 beschrieben. Durch eine Spule mit Weicheisenkern fließt ein Strom (Abb. 8.11, Pos. 1, u. lks.); der dadurch entstehende Elektromagnet zieht das Eisenplättchen an, das mit der Kontaktschraube einen elektrischen Kontakt bildet und nach unten eine Blattfeder mit Klöppel trägt. Der Klöppel erreicht die Glocke; ein Ton erklingt (Pos. 2, u. re.). Gleichzeitig wird der Kontakt zwischen Eisenplättchen und Kontaktfeder unterbrochen, der Elektromagnetismus erlischt, das Eisenplättchen geht wieder nach Pos. 1.

Mit Wechselstrom geht das noch einfacher, da die Umpolung hier hundertmal in der Sekunde geschieht (Abb. 8.12). Es genügen eine stromdurchflossene Spule mit Weicheisenkern, eine Blattfeder mit Klöppel und ein Eisenplättchen. Natürlich muß die Eigenfrequenz des schwingenden Systems mit der Netzfrequenz abgestimmt sein.

8.10.2 Türöffner

Selbst so etwas Triviales wie ein Türöffner funktioniert mit dem Induktionsprinzip (Abb. 8.13). Türzunge und Schließzunge werden durch den Sperrhebel aus Weicheisen gesichert. Fließt Strom durch die Spule mit Weicheisenkern, wird der Sperrhebel durch den Elektromagneten angezogen und gibt die Schließzunge frei. Die Tür kann von außen geöffnet werden.

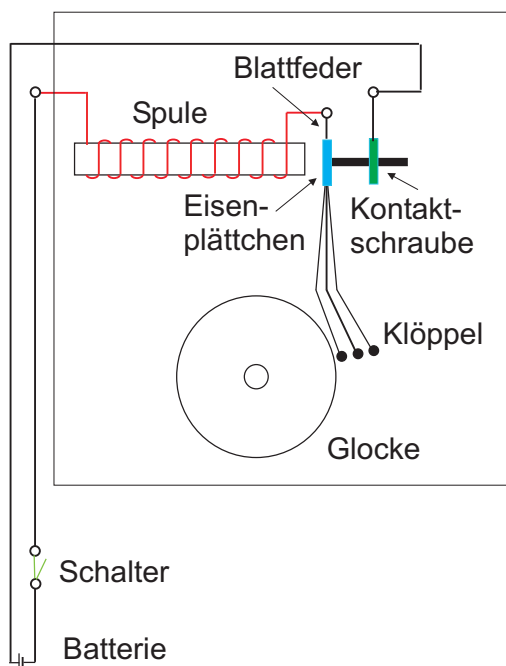
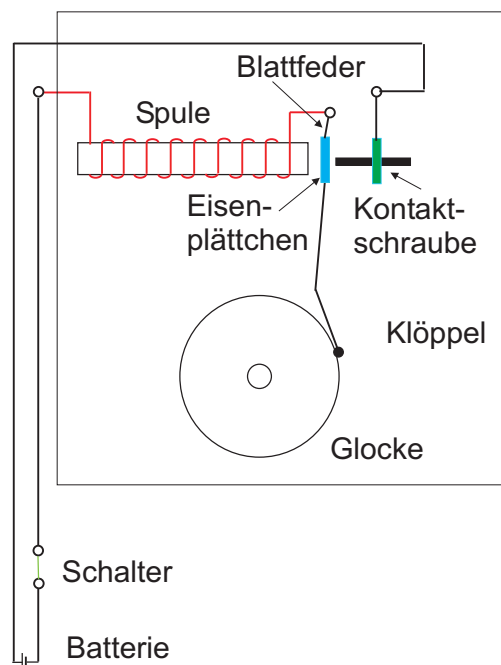
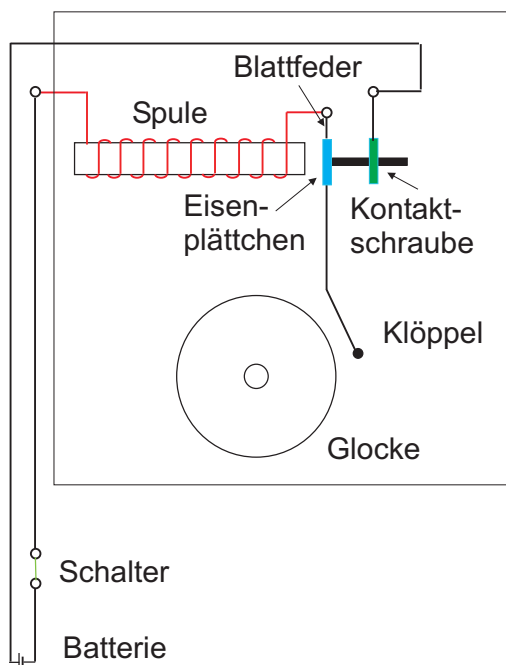


Abb. 8.11. Eine Gleichstromklingel, oben in verschiedenen Phasen, unten in den Extremphasen. Durch eine Spule mit Weicheisenkern fließt ein Strom (Pos. 1, u. lks.); der dadurch entstehende Elektromagnet zieht das Eisenplättchen an, das mit der Kontaktschraube einen elektrischen Kontakt bildet und nach unten eine Blattfeder mit Klöppel trägt. Der Klöppel erreicht die Glocke; ein Ton erklingt (Pos. 2, u. re.). Gleichzeitig wird der Kontakt zwischen Eisenplättchen und Kontaktfeder unterbrochen, der Elektromagnetismus erlischt, das Eisenplättchen geht wieder nach Pos. 1.



8.10.3 Leuchtstoffröhre

Eine der Leuchtquellen, die mit dem Segen der EU-Kommission die gute alte EDISON-Glühbirne verdrängt, ist die Leuchtstoffröhre, eine Röhre, in der eine sog. elektrische Entladung stattfindet. Dabei werden in einem evakuierten Glaskolben, in den zwei Elektroden eingeschmolzen sind, an die eine Spannung angelegt wird, Elektronen im

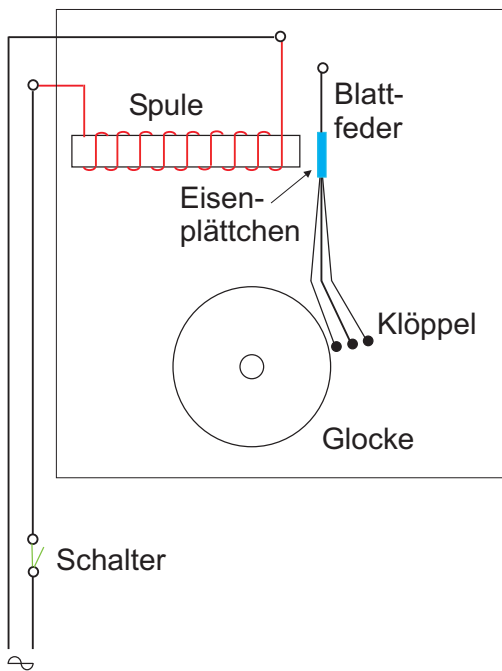


Abb. 8.12. Eine Wechselstromklingel ist dagegen wesentlich einfacher aufgebaut. Es genügen eine stromdurchflossene Spule mit Weicheisenkern, eine Blattfeder mit Klöppel und ein Eisenplättchen.

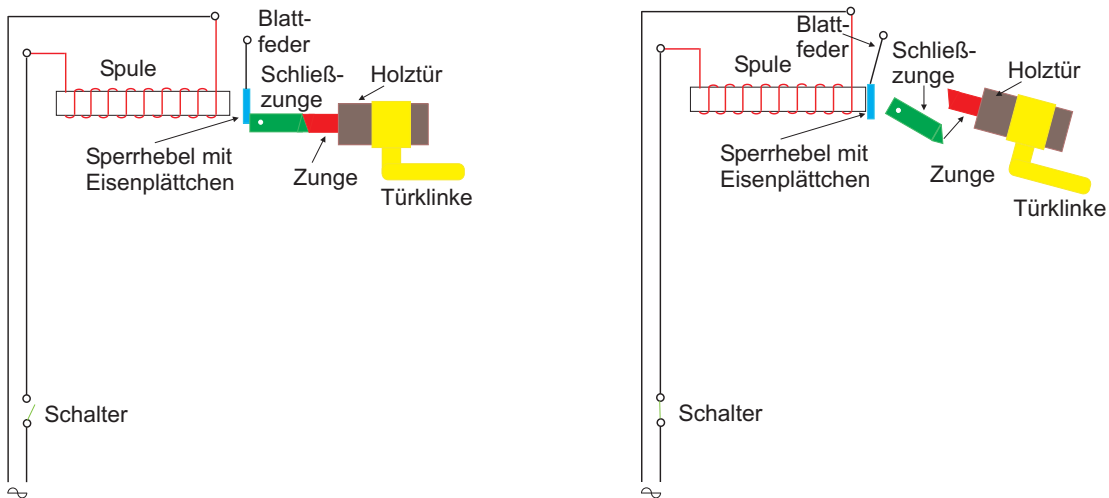


Abb. 8.13. Türöffner. Lks.: Türzunge und Schließzunge werden durch den Sperrhebel aus Weicheisen gesichert. Re.: Der Sperrhebel wird durch den Elektromagneten angezogen und gibt die Schließzunge frei.

elektrischen Feld stark beschleunigt. Durch Stoß mit Neutraltelchen werden diese sowohl ionisiert wie auch in höhere elektronische Niveaus angeregt. Zerfallen diese Zustände, wird Licht einer bestimmten Frequenz (oder Wellenlänge) ausgesendet, das mit Fluoreszenzfarbstoffen, mit denen die Innenseite der Glasröhre beschichtet wird, breitbandig dem Sonnenlicht angeglichen wird. Während zum normalen Betrieb

dieser Entladung die Netzspannung von 230 V ausreichend ist, wird zum Zünden eine wesentlich höhere Spannung benötigt. Dies wird ebenfalls durch das Induktionsgesetz ermöglicht (Abb. 8.14).

Wie aus Abb. 8.14 ersichtlich, fließt zu Beginn des Prozesses der Strom durch Drossel, die Wendeln der Leuchtstoffröhre und den Glimmzünder (Widerstand der parallel geschalteten Entladungsröhre ist ∞). Er enthält eine Glimmlampe und einen Schalter aus Streifen aus Bimetall, die im kalten Zustand keinen Kontakt haben. Bei höherer Temperatur verbiegen sie sich, und es entsteht ein elektrischer Kontakt, der die Glimmlampe kurzschließt. Die Zündspannung der Glimmlampe muß oberhalb der Betriebsspannung der Leuchtstoffröhre liegen.

Bei Stromfluß zündet nun die Glimmlampe, die Elektroden verbiegen und berühren sich, und es kommt zu einem hohen Stromfluß (Kurzschlußstrom), der die Elektroden der Leuchtstoffröhre zum Glühen bringt. Elektronen treten aus der Kathode aus; es fließt ein schwacher Strom durch die Leuchtstoffröhre, der aber immerhin größer ist als der durch die Glimmlampe, weil deren Widerstand jetzt bedeutend höher als der der Leuchtstoffröhre ist. Daraufhin kühlen die Bimetallstreifen ab, der Kontakt öffnet sich wieder, und es kommt zu einem abrupten Ende des Stromflusses. Diese Stromänderung induziert in der Drossel einen Spannungstoß, der hoch genug ist, um die Leuchtstoffröhre zu zünden.

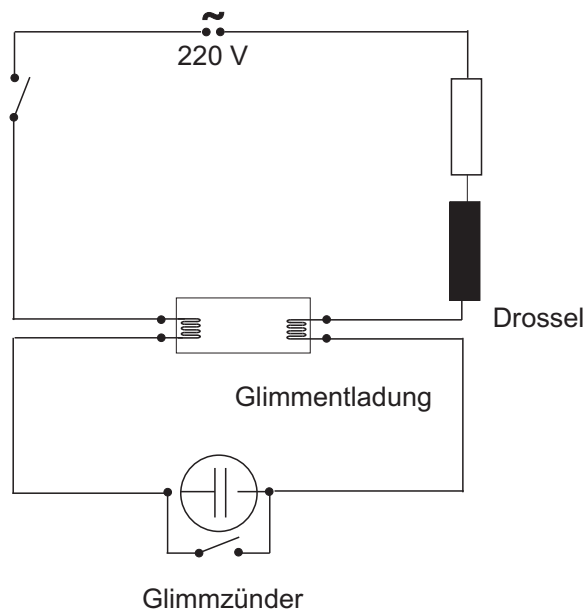


Abb. 8.14. Die Zündung einer an 220 V liegenden 50 Hz-Netzspannung liegenden Leuchtstoffröhre gelingt mit Glimmzünder (Bimetallschalter) und einer Drosselspule, die in Serie zur Leuchtstoffröhre liegen.

Beispiel 8.1 Weist die Drossel beispielsweise eine Eigeninduktivität von $1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A}$ auf, und fällt ein Strom von 5 A in einer Halbwelle der 50 Hz-Netzspannung auf Null ab, dann ist die induzierte Spannung 500 V.

Nun hat die Entladung gezündet, und es tritt eine weitere Schwierigkeit auf. Die $U(I)$ -Kennlinie zeigt negative Charakteristik, d. h. bei steigendem Strom fällt die

Spannung über die Entladungsstrecke. Bei konstanter Spannung würde die Entladung „durchgehen“. Dieses Problem wird ebenfalls mittels der in Reihe zugeschalteten Drossel gelöst.

Beispiel 8.2 Eine 40 W-Leuchtstoffröhre benötigt 1 A bei 40 V, also ist der Widerstand $R = 40 \Omega$. Damit an einer 230 V-Steckdose mit 50 Hz 1 A entnommen wird, muß jetzt $Z = 230 \Omega$ sein.

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \Rightarrow X = \sqrt{Z^2 - R^2}. \quad (8.39)$$

$$X = \sqrt{230^2 - 40^2} = 226,5 \Omega. \quad (8.40)$$

Damit wird die Impedanz 0,73 H.

8.10.4 Elektrodynamischer Lautsprecher

Auch beim „konventionellen“ Lautsprecher wird das Induktionsgesetz angewendet. Im radial homogenen Magnetfeld bewegt sich eine Tauchspule, durch die der vom Verstärker kommende Audiostrom fließt. Entsprechend diesem Signal entsteht ein dynamisches Magnetfeld, das mit dem Permanentmagnetfeld wechselwirkt: es kommt zu einer Abstoßung senkrecht zu und . Die an der Tauchspule befestigte Membran aus möglichst verwindungsstifem und gleichzeitig leichtem Material (z. B. Pappe oder Styropor) soll kolbenförmig nur nach vorne bewegt werden (Abb. 8.15). Der Konus ist mit einer Gummisicke am Gestell des Lautsprechers verbunden. Mit derartigen Lautsprechern können der Tieftonbereich gut und der Mitteltonbereich bis 800 Hz einigermaßen zufriedenstellend übertragen werden.

8.11 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 8.1 Welche magnetische Energie hat eine Spule von 4 H bei 3 A? Wieviel kJ werden frei, wenn das Feld zusammenbricht?

Lösung.

$$E = \frac{I_0^2}{2} L_\infty = 18 \text{ J}. \quad (1)$$

Aufgabe 8.2 In einer Spule der Eigeninduktivität $L = 4 \text{ H}$ fällt die Stromstärke von 3 A auf Null ab. In welcher Zeit muß dieses geschehen, damit eine (durchschnittliche) Spannung von 1000 V entsteht?

Lösung.

$$\Delta t = -\frac{L\Delta U}{U} = 12 \text{ msec}. \quad (1)$$

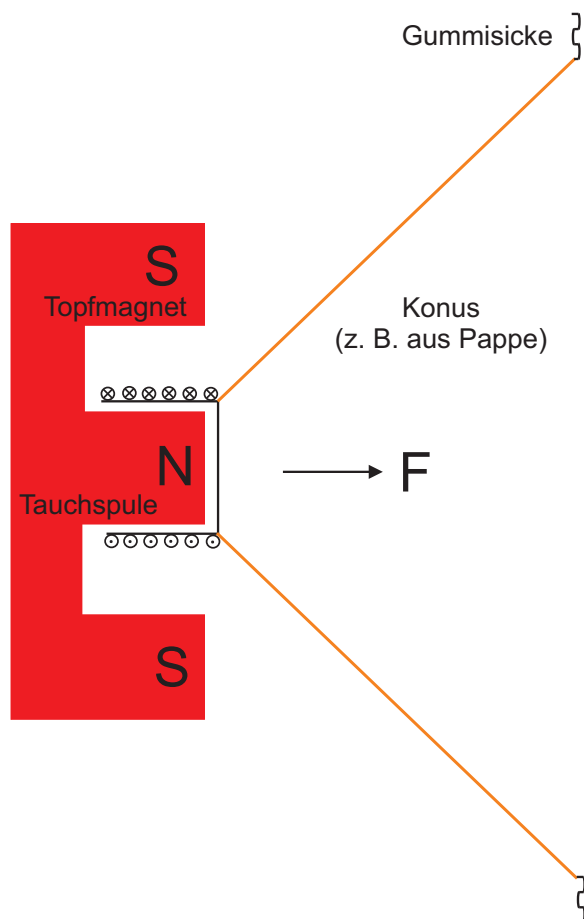


Abb. 8.15. Bei einem elektrodynamischen Lautsprecher wechselwirken zwei Magnetfelder: das statische des Permanentmagneten mit dem dynamischen, das durch den Audiostrom erzeugt wird, das durch die Tauchspule fließt. Gemäß der Korkenzieher-Regel von FLEMING fließt im unteren Abschnitt der Strom (Ursache, Daumen) auf uns zu, das Magnetfeld (Vermittlung, Zeigefinger) vom Nord- zum Südpol nach unten, die Wirkung (Kraft, Mittelfinger), nach rechts. Im oberen Bereich Ursache hinein, Magnetfeld nach oben, Kraft nach rechts.

Aufgabe 8.3 Wie groß ist die induzierte Spannung in einer $s = 5$ cm breiten Leiterschleife, auf der $N = 100$ Drahtwindungen aufgewickelt sind, wenn diese mit einer Geschwindigkeit von $v = 1$ mm/sec senkrecht zum konstanten Magnetfeld ($B = 10$ mV sec/m²) bewegt wird (Abb. 8.16)?

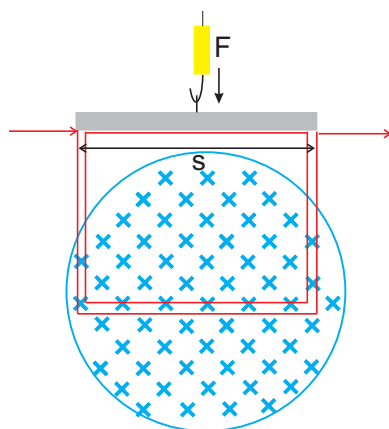


Abb. 8.16. Der stromdurchflossene Leiter erfährt im Feld der Spule eine Kraft nach unten (Ansicht in Längsachse der Spule).

Lösung.

$$U_{\text{ind}} = NBlv \Rightarrow U_{\text{ind}} = 5 \mu\text{V}. \quad (1)$$

Aufgabe 8.4 In einer Erregerspule ($N = 16\,000$ auf 50 cm Länge) steigt der Strom in 40 sec von Null auf $0,1$ A gleichmäßig an. Eine im homogenen Feld dieser Spule befindliche Induktionsspule ($N = 2\,000$) besitze einen Querschnitt von 28 cm². Wie hoch ist die zwischen den Spulenenden gemessene Induktionsspannung?

Lösung.

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{N\mu_0 I}{tl} = \frac{16000 \cdot 4\pi 10^{-5} \cdot 0,1}{40 \cdot 0,5} \frac{\text{Vsec/A m} \cdot \text{A}}{\text{sec m}} = 10^{-4} \text{ V/m}^2. \quad (1)$$

Dann ist die Änderung des Flusses in der Induktionsspule:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 28 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4} = 28 \cdot 10^{-8} \text{ V}. \quad (2)$$

Dies ist die Spannung, die in jeder Windung entsteht; insgesamt also zwischen den beiden Spulenenden:

$$U_{\text{ind}} = 2 \cdot 10^3 \cdot 28 \cdot 10^{-8} = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ V}. \quad (3)$$

Aufgabe 8.5 Bestimmen Sie aus dem Ausdruck für den Energiegehalt einer langen Spule, in der der Strom I fließt, die Dichte der magnetischen Energie im Material der Suszeptibilität χ !

Lösung.

$$W = \frac{1}{2} LI^2. \quad (1)$$

Die Selbstinduktion einer (langen) Spule, die mit Materie der Suszeptibilität χ gefüllt ist, bestimmen wir mit dem Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -NA \frac{dB}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2)$$

Mit den Definitionen der Magnetisierung und Suszeptibilität ergibt sich weiter

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0(1 + \chi)H = \mu_0(1 + \chi) \frac{NJ}{l}, \quad (3)$$

folglich ist der Selbstinduktionskoeffizient

$$L = \mu_0(1 + \chi) \frac{N^2 A}{l}. \quad (4)$$

Einsetzen in Gl. (1) liefert

$$W = \frac{1}{2}\mu_0(1 + \chi)Al H^2, \quad (5)$$

woraus die Energiedichte

$$u = \frac{1}{2}\mu_0(1 + \chi)H^2 \quad (6)$$

folgt: Der erste Summand ist die Energiedichte im Vakuum, der zweite liefert den Beitrag der Materie.

Aufgabe 8.6 Auf eine lange Luftspule (1) ($l_1 = 10$ cm, $A_1 = 8$ cm², $N_1 = 100$) sei in deren Mitte die Induktionsspule eng aufgewickelt, so daß $A_2 = 8$ cm² ($l_2 = 1$ cm, $N_2 = 10$).

- Wie hoch ist der Spannungsstoß in der Spule (2), wenn in der Spule (1) der Strom 1 A eingeschaltet wird?
- Wie hoch ist die Gegeninduktivität?
- Welche Selbstinduktivität hat Spule (1)?

Lösung. Findet in Spule (1) eine Stromänderung statt, ändert sich die Flußdichte hier, aber auch in Spule (2), was eine Spannungsinduktion zur Folge hat:

$$U_{\text{ind},2} = -L_{21}\dot{I}_1 \quad (1)$$

mit L_{12} der Gegeninduktivität, die in erster Linie von der Anordnung der Spulen zueinander abhängt. Für $A_1 = A_2$ ist L_{12}

$$L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} = 10^{-5} \text{ H} = \text{Henry}. \quad (2)$$

Damit wird der Spannungsstoß

$$U_{\text{ind}} dt = 1,01 \cdot 10^{-5} \text{ V sec}. \quad (3)$$

Wird die Fläche der Induktionsspule verkleinert, nimmt der Fluß auf das Flächenverhältnis A_2/A_1 ab, damit auch L_{21} und der Spannungsstoß. Wird die Fläche der Spule (2) dagegen vergrößert, sinkt der Fluß ebenfalls, da sich die Spule (2) nun im Feld der rückläufigen Feldlinien der Spule (1) befindet.

Die Selbstinduktivität der Spule (1) schließlich ist

$$L_1 = \mu_0 \frac{A_1 N_1^2}{l_1} = 10^{-4} \text{ H}. \quad (4)$$

Aufgabe 8.7 In einer Spule von 10 cm Länge mit 1000 Windungen steigt die Stromstärke in 10 sec gleichmäßig von 1 auf 6 A. Bestimmen Sie die Zunahme der magnetischen Flußdichte B pro Sekunde. Wenn in dieser Spule eine gleichlange Induktionsspule mit 100 Windungen und 20 cm^2 Fläche liegt: Welche Spannung wird in ihr induziert, wenn die Spulenachsen parallel liegen? In welcher Zeit muß der Strom von 6 auf 0 A abnehmen, damit in ihr eine Spannung von 400 V induziert wird?

Lösung.

$$H = \frac{nI}{l} = 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}} \wedge 6 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}} \Rightarrow \Delta H = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (1)$$

$$\Delta B = \mu_0 \Delta H = 6,3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Vsec}}{\text{m}^2}. \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t} = 6,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vsec}}{\text{m}^2}. \quad (2)$$

$$U_{\text{ind}} = 100 \cdot 6,3 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 = 0,126 \text{ mV}. \quad (3)$$

$$L = 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 251 \cdot 10^{-6} \text{ H}. \quad (4)$$

$$U_{\text{ind}} = -L\dot{I} \Rightarrow \dot{I} = \frac{400}{251 \cdot 10^{-6}} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ A/sec} \Rightarrow t = 3,75 \mu\text{sec}. \quad (5)$$

Literaturverzeichnis

- [1] A.A. Adamson, J. Chem. Educ. **55**, 634 (1978)
- [2] E. Bauer, Rep. Prog. Phys. **57**, 895 (1994)
- [3] E. Bauer, Surf. Rev. Lett. **5**, 1275 (1998)