

# **Physik I Mechanik**

**Gerhard Franz**

ISBN 978-3-981-24722-0

25. Februar 2012

# Was ist Physik?

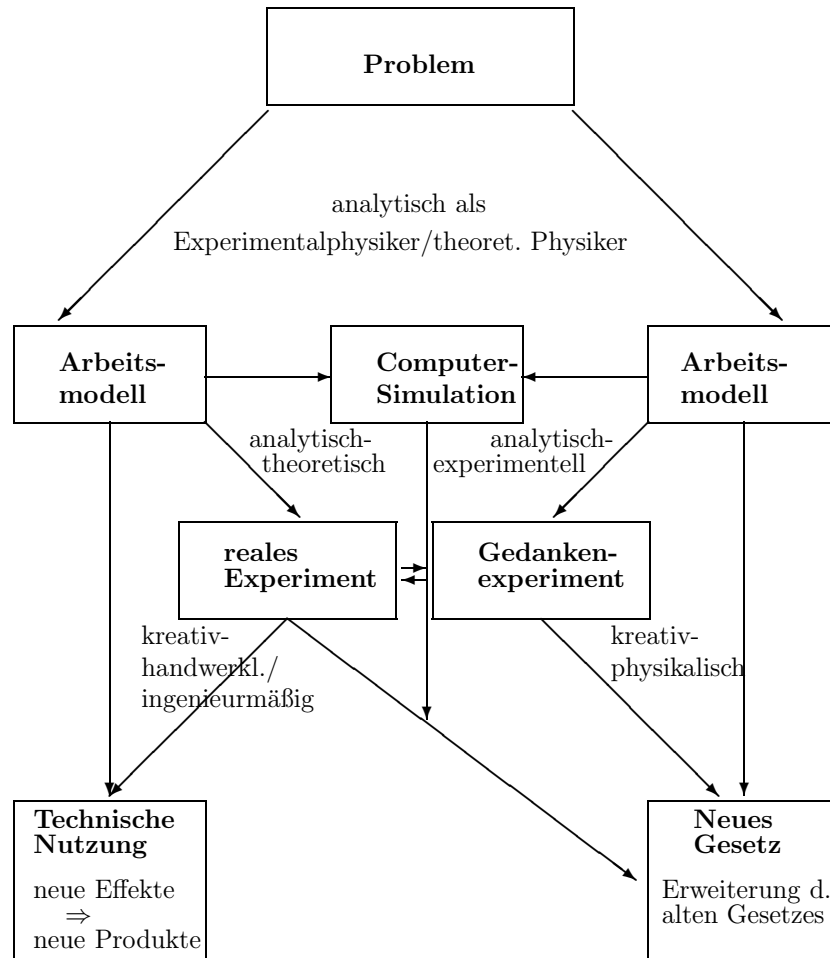
Stellen wir uns zunächst die Frage: „Was ist und zu welchem Ende studieren wir Physik?“

Physik beschäftigt sich mit den Erscheinungen der unbelebten Natur. Ihre Beschreibung gelingt mit Hilfe eindeutig definierter Begriffe, die zu Gesetzen verdichtet werden. Dahinter steht die naturwissenschaftliche Denkmethodik, die Annahme der Gültigkeit universeller, reproduzierbarer Naturgesetze, die Beziehungen zwischen den Objekten oder Dingen in der Natur vermitteln.

- **Reproduzierbarkeit**
- **Kausalität**
- **Universalität**

Naturgesetze sind auf Objekte anwendbar. Wir erfahren etwas über Objekte, indem wir reproduzierbare Versuche an ihnen ausführen, die objektivierbar sind, d. h. die unter gleichen Bedingungen, unabhängig von einer Person, die die Versuche durchführt, das gleiche Ergebnis liefern. In diesem Umkehr- und Rückschluß (induktive und deduktive Beweisführung) stoßen wir wie in der Geometrie des EUKLID schließlich auf nicht mehr beweisbare Basen, sog. *Axiome*, die die Fixsterne des gesamten, in sich konsistenten und widerspruchsfreien Gebäudes sind.

- **Problemstellung:** Erde als Scheibe, Mittelpunkt der Welt, Versteinerungen auf Bergen.
- **Experiment:**
  - Reales Experiment. Wichtigste Forderung ist die *Reproduzierbarkeit*. Feststellung der Bedingungen bei der Ausführung des Experiments. Da oft störende Einflüsse den Blick auf das Ergebnis trüben, bedient man sich der 2. Ausprägung. Was bedeutet Störung, „Dreckeffekt“?



**Abb. 1.** Schema des Wechselspiels zwischen Theorie und Experiment, um die „Wirklichkeit“ zu erfassen und wissenschaftlich erfahrbar zu machen.

- Gedankenexperiment. Alle störenden Einflüsse werden verbannt, und man konzentriert sich nur auf die Auswirkungen eines bestimmten Gesetzes auf das betrachtete Objekt oder System. KANT: „Der Verstand schreibt der Natur die Gesetze vor!“
- Computereperiment (Simulation). Mittelding zwischen beiden Extremen. Viele reale Experimente lassen sich heute durch Simulation einsparen. Chips werden heute durch Rechner konzipiert.
- **Hypothese:** Darunter verstehen wir die Basis für eine Diskussion der Ergebnisse von Experimenten, die entweder nützlich oder unnützlich sind. Hypothesen sind weder richtig noch falsch.
- **Kritik:** Offenbar geht die Sonne auf und unter, dennoch ist dieses im astronomischen Sinne „falsch“  $\Rightarrow$  so wird aus einer Hypothese nun eine These.

- **Modell:** Unter einem Modell verstehen wir eine Erklärung eines bestimmten Sachverhaltes, den wir durch unser Experiment beleuchtet haben. Wir verwenden dazu uns bereits bekannte Naturgesetze. Da dieses Modell die Realität vereinfacht, um sie mathematisch beschreibbar zu machen, muß es nicht überall mit der Wirklichkeit übereinstimmen.
- **Gesetz:** Damit sind alle Sachverhalte und Phänomene einer bestimmten Fragestellung erklärbar. Kennzeichen der physikalischen Gesetze ist, daß sie mathematisch formuliert sind — im Unterschied zu vielen Gesetzen der Biologie, Medizin, aber auch der Chemie, oft als „Physik der Elektronenhülle“ bezeichnet. Nur in äußerst seltenen Fällen (Relativitätstheorie, Quantenmechanik) müssen neue Gesetzmäßigkeiten eingeführt werden, die das bisher gültige Gesetz als Grenzfall enthalten müssen.
- **Richtigkeit** Über die Richtigkeit (Welches von zwei möglichen Gesetzen ist nun richtig?) entscheidet OCKHAMS Rasiermesser: Mit je weniger Prämissen ein Gesetz zur Beschreibung eines Sachverhalts auskommt, um so einfacher, um so universeller ist es. *Simplex signum veri* — Das Einfache ist das Wahrzeichen der Wahrheit.

Experiment und Modell (Gesetz) stehen in permanentem und notwendigem Spannungsverhältnis. Universalität bedeutet: auch nur ein Experiment gegen die Aussage eines Gesetzes läßt dieses ungültig werden. Daher ist die Festlegung und Mitteilung der Bedingungen elementar.

⇒ 2 Spezies: der SCHILLERSche Brotgelehrte und der philosophische Kopf. Beide finden ihr Glück in der Wissenschaft, und beide ergänzen sich in komplementärem Sinne. Während aber der Brotgelehrte große Dinge klein macht, aus Angst, wieder etwas Neues lernen zu müssen, freut sich der philosophische Kopf über jeden, auch kleinen, Fortschritt, weil er Licht ins Dunkel der Unkenntnis bringt.

Dieses Skriptum ist das Ergebnis eigener iterativer Prozesse, grundlegende Denkstrukturen mitzuteilen, die sich in der Physik als erfolgreich erwiesen haben, um mechanische Sachverhalte zu verstehen. Bei den Übungsaufgaben wurde auf eigene Vorräte, aber auch auf Aufgabenstellungen verehrter Kollegen zurückgegriffen, die hier *in extenso* diskutiert werden. Damit soll nicht suggeriert werden, das sei der einzige Weg. Auch in der Physik führen viele Wege nach Rom.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kinematik</b>	<b>1</b>
1.1	Translation . . . . .	1
1.1.1	Weg-Zeit-Gesetz I . . . . .	1
1.1.2	Weg-Zeit-Gesetz II . . . . .	3
1.1.3	Polare Vektoren . . . . .	4
1.1.4	Weg-Zeit-Gesetz III . . . . .	4
1.2	Überlagerung von Bewegungen . . . . .	5
1.2.1	Waagerechter Wurf . . . . .	5
1.2.2	Schiefer Wurf nach oben . . . . .	6
1.2.2.1	Zerlegung in Komponenten. . . . .	6
1.3	Rotation . . . . .	7
1.3.1	Allgemeine Bewegung . . . . .	7
1.3.2	Kreisbewegung . . . . .	9
1.3.3	Beispiele . . . . .	10
1.4	Aufgaben und Lösungen . . . . .	10
1.4.1	Vektoren . . . . .	10
1.4.2	Translation . . . . .	15
1.4.3	Überlagerung von Bewegungen . . . . .	19
1.4.4	Rotation . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Metrologie</b>	<b>25</b>
2.1	Längenmessung . . . . .	26
2.2	Winkelmessung . . . . .	29
2.3	Zeitmessung . . . . .	29
2.3.1	Messung langer Zeiten und Zeiträume . . . . .	29
2.3.2	Messung kurzer Zeiten und Zeiträume . . . . .	29
2.4	Masse . . . . .	30
2.5	Aufgaben und Lösungen . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Prinzipien der Mechanik</b>	<b>33</b>
3.1	Der Begriff der Kraft . . . . .	33
3.1.1	Schwere Masse . . . . .	33
3.1.2	Träge Masse . . . . .	33

3.2	Inertialsystem . . . . .	34
3.3	Impuls I (Impulserhaltung) . . . . .	36
3.3.1	Rückstoß . . . . .	37
3.4	Aktion . . . . .	38
3.5	Gravitationskraft . . . . .	38
3.6	Zerlegung von Kräften . . . . .	39
3.7	Reibungskraft . . . . .	41
3.7.1	Strömungswiderstand . . . . .	42
3.8	Scheinkraft . . . . .	43
3.8.1	Freier Fall . . . . .	44
3.9	Arten der Kräfte . . . . .	44
3.10	Actio = Reactio . . . . .	45
3.10.1	Fortbewegung . . . . .	45
3.10.1.1	zu Lande. . . . .	45
3.10.1.2	auf dem Wasser. . . . .	45
3.10.1.3	in der Luft. . . . .	46
3.10.2	Rückstoß und Raketengleichung . . . . .	46
3.11	Aufgaben und Lösungen . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Grundbegriffe der Physik</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1	Arbeit . . . . .	55
4.1.1	Hubarbeit . . . . .	55
4.1.2	Reibungsarbeit . . . . .	56
4.1.3	Coulomb-Reibung . . . . .	57
4.1.4	Stokes-Reibung . . . . .	57
4.1.5	Newton-Reibung . . . . .	57
4.1.6	Spannarbeit . . . . .	58
4.1.7	Beschleunigungsarbeit . . . . .	58
4.1.8	Physikalische gegen tägliche Arbeit . . . . .	58
4.2	Energie . . . . .	59
4.2.1	Potentielle Energie . . . . .	59
4.2.2	Andere Energien . . . . .	59
4.3	Kraft und Potentielle Energie . . . . .	59
4.4	Energie und Erhaltung der Energie . . . . .	60
4.4.1	Gravitationspotential . . . . .	62
4.5	Feld und konservative Kraft . . . . .	62
4.6	Gravitationsfeld . . . . .	63
4.6.1	Freier Fall . . . . .	63
4.7	Potentielle Energie und Kraft . . . . .	64
4.8	Homogenität und Äquivalenzprinzip . . . . .	64
4.8.1	Bewegung im homogenen Feld . . . . .	65
4.9	Grenzen der Bewegung . . . . .	65
4.10	Impuls . . . . .	68
4.10.1	Elastische Stöße . . . . .	68
4.10.1.1	Grenzfall 1: Große Massenunterschiede. . . . .	68

4.10.1.2	Grenzfall 2: Gleiche Massen. . . . .	68
4.10.1.3	Grenzfall 3 (Zentraler Stoß). . . . .	69
4.10.2	Schwerpunkt . . . . .	70
4.11	Leistung . . . . .	71
4.12	Aufgaben und Lösungen . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Mechanik des starren Körpers</b>	<b>79</b>
5.1	Kinematik der Rotation . . . . .	79
5.1.1	Komponentendarstellung . . . . .	80
5.1.1.1	Koordinaten. . . . .	80
5.1.1.2	Geschwindigkeit. . . . .	81
5.1.1.3	Identifizierung von $\omega$ . . . . .	82
5.2	Energie und Trägheitsmoment . . . . .	83
5.2.1	Steinerscher Satz . . . . .	84
5.3	Drehimpuls . . . . .	85
5.3.1	Bewegung im Schwerfeld . . . . .	87
5.4	Anwendungen . . . . .	88
5.4.1	Hebelgesetz . . . . .	88
5.4.2	Standfestigkeit . . . . .	89
5.4.3	Kreiselprobleme . . . . .	89
5.4.3.1	Präzession. . . . .	89
5.5	Trägheitskräfte . . . . .	90
5.5.1	Rotierende Systeme . . . . .	91
5.5.2	Zentrifugalkraft . . . . .	92
5.5.3	Corioliskraft . . . . .	93
5.5.3.1	Foucault-Pendel. . . . .	94
5.6	Arbeit bei der Kreisbewegung . . . . .	95
5.7	Aufgaben und Lösungen . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Himmelsmechanik</b>	<b>103</b>
6.1	Keplersche Gesetze und Gravitationsgesetz . . . . .	103
6.1.1	2. Keplersches Gesetz . . . . .	103
6.1.2	Gravitationsfeld . . . . .	105
6.2	Ebbe und Flut . . . . .	106
6.3	Der Präzessionszyklus der Erde . . . . .	107
6.4	Lichtgeschwindigkeit . . . . .	110
6.5	Aufgaben und Lösungen . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Mechanik deformierbarer Medien</b>	<b>121</b>
7.1	Aggregatzustände . . . . .	121
7.1.1	Fester Zustand . . . . .	121
7.1.2	Flüssigkeiten . . . . .	121
7.1.3	Gase . . . . .	122
7.2	Deformation fester Körper . . . . .	122
7.2.1	Dehnung . . . . .	122

7.2.2	Querkontraktion . . . . .	123
7.2.3	Elastische Energie . . . . .	124
7.2.4	Allseitige Kompression . . . . .	125
7.2.5	Elastische Energie . . . . .	126
7.2.6	Poissonsche Ungleichung . . . . .	126
7.2.7	Scherung und Torsion . . . . .	126
7.2.8	Plastizität . . . . .	128
7.3	Hydro- und Aerostatik . . . . .	129
7.3.1	Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen . . . . .	129
7.3.2	Druck . . . . .	130
7.3.3	Kolbendruck . . . . .	131
7.3.4	Kompressibilität . . . . .	131
7.3.5	Schweredruck . . . . .	132
7.3.6	Auftrieb . . . . .	133
7.3.7	Hydrostatisches Paradoxon . . . . .	133
7.4	Hydrodynamik . . . . .	135
7.4.1	Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit . . . . .	135
7.4.2	Strömung einer idealen Flüssigkeit . . . . .	136
7.4.2.1	Zur Kontinuitätsgleichung. . . . .	137
7.4.2.2	Gaußscher Satz. . . . .	138
7.4.3	Anwendungen . . . . .	139
7.4.3.1	Ausströmung aus einem Loch. . . . .	139
7.4.3.2	Wasserstrahlpumpe. . . . .	139
7.4.4	Laminare Strömung . . . . .	140
7.4.4.1	Zähigkeit oder Viskosität. . . . .	140
7.4.4.2	Hagen-Poiseuillesches Gesetz. . . . .	142
7.4.5	Stokessches Gesetz und Ähnlichkeitsmethode . . . . .	142
7.4.5.1	Bestimmung der Elementarladung durch Millikan. . . . .	144
7.4.6	Wirbel . . . . .	144
7.5	Aufgaben und Lösungen . . . . .	148
7.5.1	Deformation fester Körper . . . . .	148
7.5.2	Hydro- und Aerostatik . . . . .	150
7.5.3	Hydrodynamik . . . . .	154
<b>8</b>	<b>Transportphänomene</b> . . . . .	<b>159</b>
8.1	Thermisches Gleichgewicht . . . . .	159
8.2	Diffusion . . . . .	159
8.3	Konvektion . . . . .	160
8.4	Wärmeleitung und Wärmeleitfähigkeit . . . . .	160
8.5	Ausgleichszeit und Random Walk . . . . .	161
<b>9</b>	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>163</b>

# 1 Kinematik

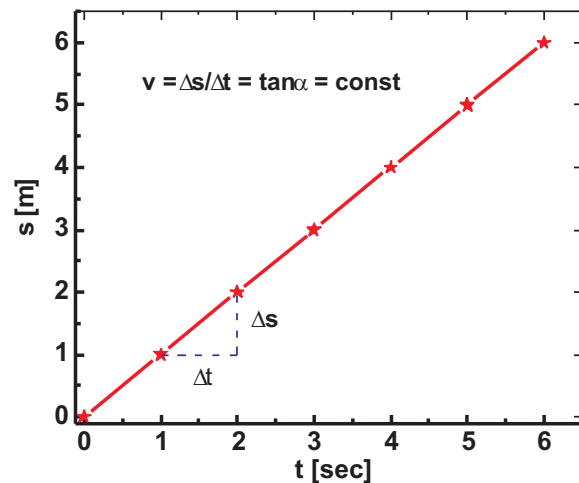
Unter Kinematik verstehen wir das Verfahren, aus einem beliebigen Bewegungsablauf die Vektorfunktionen

- Bahnkurve  $s$ ,
- Geschwindigkeit  $v$
- Beschleunigung  $a$

herzuleiten. Wir werden mit einigen phänomenologischen Beispielen unsere Untersuchungen beginnen.

## 1.1 Translation

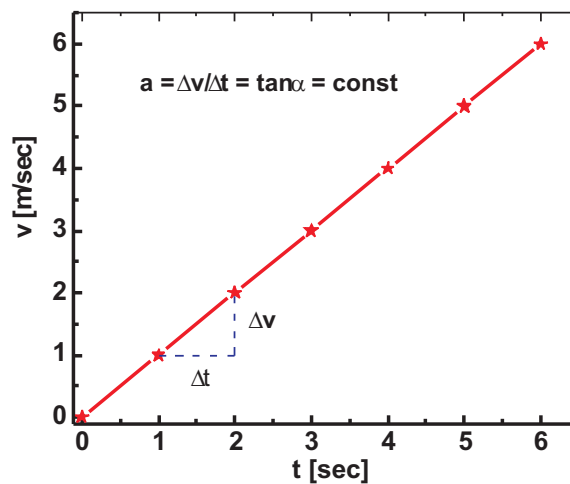
### 1.1.1 Weg-Zeit-Gesetz I



**Abb. 1.1.** Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit  $\Delta s/\Delta t$  konstant.

Aus der Definitionsgleichung

$$v = \frac{s}{t} \tag{1.1}$$



**Abb. 1.2.** Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v/\Delta t$  konstant, hier gezeigt für Geschwindigkeitszunahme oder positive Beschleunigung.

folgt die Bestimmungsgleichung

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.2.1)$$

**Beispiel 1.1.** 20 km in 10 min:  $v = 2 \text{ km/min}$  oder  $120 \text{ km/h}$ .

Diese *Durchschnittsgeschwindigkeit* ist der Mittelwert zahlloser, unterschiedlicher *Momentangeschwindigkeiten*, die das Tachometer anzeigt (Abb. 1.1):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.2.2)$$

Ändert sich die Tachometeranzeige, wird das Fahrzeug beschleunigt, es wird entweder schneller (positiv beschleunigt) oder langsamer (abgebremst). Beim Test von 0 auf 100 Stundenkilometer soll die Geschwindigkeit gleichmäßig zunehmen (Bestimmungsgleichung) (Abb. 1.2):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.3.1)$$

**Beispiel 1.2.** M. SCHUHMACHER beschleunigt in 2,5 sec von 0 auf  $120 \text{ km/h} = 33 \text{ m/sec}$ . Beschleunigung:  $13,3 \text{ m/sec}^2$ .

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.3.2)$$

Damit ergibt sich eine Geschwindigkeitszunahme pro Sekunde von

$$dv = a dt, \quad (1.4)$$

im konkreten Fall von  $\Delta v = 13,3 \text{ m/sec}$ .

### 1.1.2 Weg-Zeit-Gesetz II

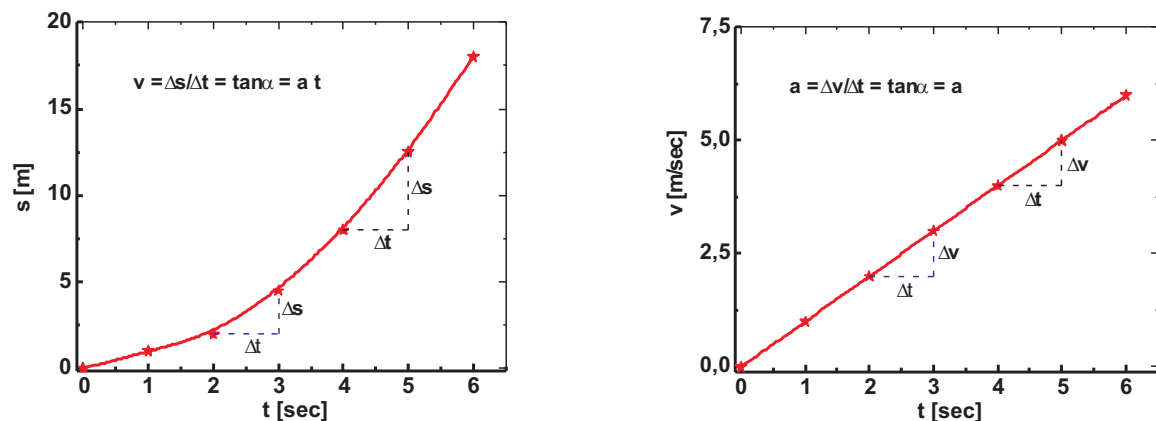
Bisher war  $s$  vorgegeben, und die Ableitungen  $v$  und  $a$  sollten bestimmt werden. Nun wird  $a$  vorgegeben, und es werden  $v$  und  $s$  gesucht, die sog. Stammfunktionen zu  $a$  ( $v$ ) und  $v$  ( $s$ ).

Jede Funktion

$$v = at + v_0 \quad (1.5)$$

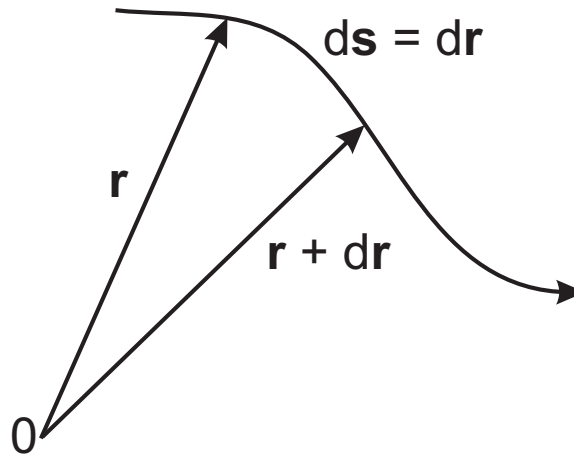
ist eine Lösung (Abb. 1.3).  $a$  ist die Stammfunktion,  $v_0$  die Integrationskonstante, mit der Zusatzinformationen bereitgestellt werden. War das zu beschleunigende System entweder

- in Ruhe ( $v_0 = 0$ ), oder
- bewegte es sich vorwärts ( $v_0 > 0$ ), oder
- bewegte es sich rückwärts ( $v_0 < 0$ )?



**Abb. 1.3.** Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung nimmt die zurückgelegte Wegstrecke quadratisch mit der Zeit zu (lks). Die Geschwindigkeitszunahme ist linear (re.)

Prototyp für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist der „Freie Fall“. Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ .



**Abb. 1.4.** Die von einem Massenpunkt durchlaufene Raumkurve, an die im Zeitabstand  $dt$  zwei Ortsvektoren angelegt werden, die sich um  $d\mathbf{r}$  unterscheiden.

### 1.1.3 Polare Vektoren

Es reicht nicht aus, zu sagen, wie lang die zurückgelegte Strecke, wie hoch die Geschwindigkeit, wie rasch die Geschwindigkeitsänderung sind, sondern es ist zusätzlich die Angabe der Richtung erforderlich.

Vektoren sind Zahlentripel, die sich auf ein Koordinatensystem beziehen und sich bei Koordinatentransformationen wie die Komponenten einer gerichteten Strecke transformieren. Daher läßt sich jeder Vektor durch ein Zahlentripel  $(x,y,z)$  eindeutig beschreiben. Dieses nennt man seine Komponenten.

Die Zahl 3 spiegelt die 3 Dimensionen des Raums wider. In der Ebene benötigt man nur 2 Komponenten, in der Dimension Raum-Zeit dagegen vier.

Damit können wir unsere Raumkurve auch schön vektoriell zeichnen, indem wir die Ortsvektoren an eine Raumkurve ziehen, die unser Massenpunkt durchläuft, und auch hier den Grenzübergang für sehr kleine  $dt$  durchführen und so die Geschwindigkeit erhalten (Abb. 1.4).<sup>1</sup>

### 1.1.4 Weg-Zeit-Gesetz III

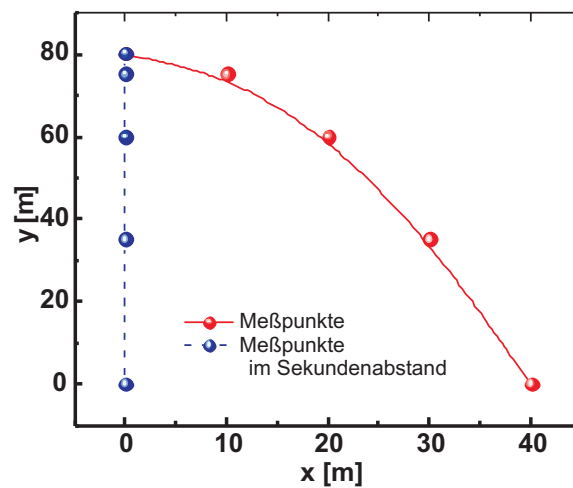
Da die drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{s}$  gleichgerichtet sind, bereitet die Integration keine Schwierigkeiten:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1.6)$$

Integration:

---

<sup>1</sup>im Englischen wird zwischen *speed*, einer skalaren Größe, und *velocity*, einer vektoriellen Größe, unterschieden.



**Abb. 1.5.** Eine Kugel wird aus einem Turm waagrecht nach vorne geworfen, eine zweite fällt gleichzeitig senkrecht nach unten. Beide schlagen gleichzeitig am Boden auf.

$$\int dv = \int a dt \Rightarrow v = at + v_0. \quad (1.7)$$

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (1.8)$$

Integration:

$$\int ds = \int v dt \Rightarrow s = \int (at + v_0) dt \Rightarrow s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0. \quad (1.9)$$

## 1.2 Überlagerung von Bewegungen

### 1.2.1 Waagerechter Wurf

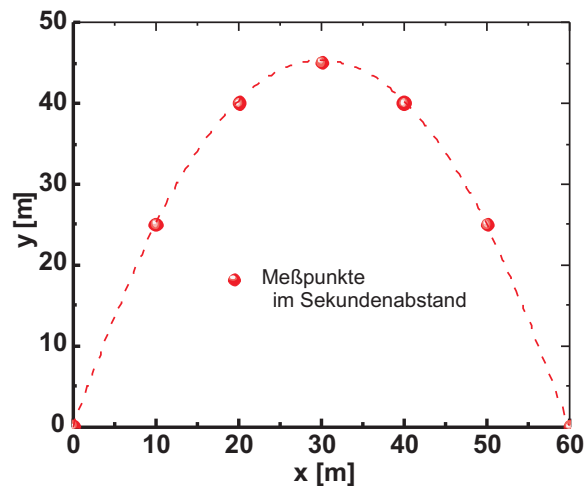
**Beispiel 1.3.** Eine Kugel wird aus 80 m Höhe nach vorn mit 10 m/sec<sup>2</sup> beschleunigt und fällt gleichzeitig mit der Erdbeschleunigung (10 m/sec<sup>2</sup>) nach unten. Die Flugkurve verläuft wie nach Abb. 1.5).

Um die Bahnkurve zu ermitteln, eliminieren wir aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

die Zeit  $t$  und erhalten

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2. \quad (1.11)$$



**Abb. 1.6.** Eine Kugel wird schräg nach oben geworfen und beschreibt diese Wurfparabel.

## 1.2.2 Schiefer Wurf nach oben

**Beispiel 1.4.** Eine Kugel wird vom Boden aus schräg nach oben (nach vorn mit 10, nach oben mit  $30 \text{ m/sec}^2$ ) beschleunigt und fällt wegen der nicht abschaltbaren Erdbeschleunigung mit  $10 \text{ m/sec}^2$  wieder nach unten. Die Flugkurve verläuft wie nach Abb. 1.6).

*Die Wurfbahn ist eine ungestörte Überlagerung von Bewegungen:*

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Die Wurfhöhe (Extremum) ergibt sich durch Differenzierung der  $y$ -Komponente und Nullsetzen (zunächst  $t$ -Komponente):

$$s_y = v_{y,0} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = v_{y,0} - g t \Rightarrow T = \frac{v_{y,0}}{g} \quad (1.13.1)$$

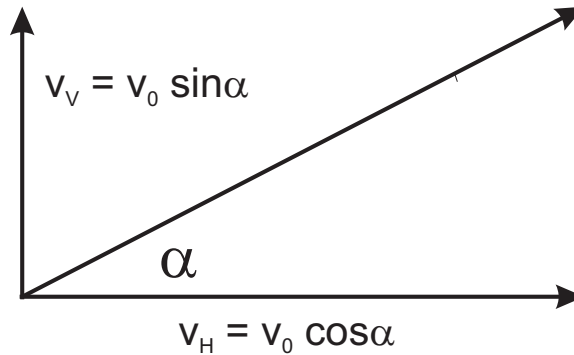
und anschließendes Einsetzen in die Definitionsgleichung zu

$$s_y = v_{y,0} \cdot \frac{v_{y,0}}{g} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_{y,0}}{g} \right)^2 = \frac{v_{y,0}^2}{2g}. \quad (1.13.2)$$

**1.2.2.1 Zerlegung in Komponenten.** Zerlegung der Anfangsgeschwindigkeit in eine Komponente für die horizontale und eine für die vertikale Bewegung führt also zu (Abb. 1.7)

$$\begin{array}{ll} \text{horizontale Komponente} & v_{x,0} = v_0 \cos \alpha \\ \text{vertikale Komponente} & v_{y,0} = v_0 \sin \alpha. \end{array} \quad (1.14)$$

Damit ergeben sich weiter



**Abb. 1.7.** Zerlegung der Geschwindigkeit in eine horizontale und eine vertikale Komponente.

- aus Gl. (1.13.1) die Steigzeit zu

$$T = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (1.15.1)$$

die genau halb so lang wie die Flugzeit ist:

$$T^* = 2T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (1.15.2)$$

woraus sich schließlich

- die Wurfweite mit den Additionstheoremen zu

$$s = v_{x,0}t = v_0 \cos \alpha t = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (1.15.3)$$

ergibt.

## 1.3 Rotation

Bei der Translation haben  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  die gleiche Richtung und können ihre Beträge verändern. Es ist aber auch der Fall möglich, daß sie einen Winkel zueinander aufweisen.

### 1.3.1 Allgemeine Bewegung

Im Falle einer allgemeinen dreidimensionalen Raumkurve spricht man von einer gekrümmten Trajektorie, bei der die Geschwindigkeit sich sowohl dem Betrag wie der Richtung nach verändern kann (Abb. 1.8 lks.). Um die Änderung des Vektors der



**Abb. 1.8.** Bei einer gekrümmten Trajektorie (lks.) kann man den Differenzvektor nicht einfach durch gewohnte Vektorsubtraktion ermitteln. Wie aus der rechten Graphik ersichtlich, kann man die Änderung der Geschwindigkeit in einen parallelen und einen dazu senkrechten (orthogonalen) Anteil zerlegen.

Geschwindigkeit zu ermitteln, kann man jedoch nicht einfach die Vektoren voneinander subtrahieren, *weil sie nicht am gleichen Punkt beginnen!* Daher zeichnen wir eine Hilfsdarstellung (Abb. 1.8, re.), und ermitteln als Differenzvektor einen Vektor  $\Delta v$ , den wir in einen parallelen und einen dazu senkrechten Anteil zerlegen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel}. \quad (1.16)$$

Die parallele Komponente der Geschwindigkeitsänderung ist

$$a_{\parallel} = \frac{dv}{dt} : \quad (1.17)$$

die Richtung der Geschwindigkeit ist gleich der Richtung der Beschleunigung, und der Massenpunkt bewegt sich auf einer Geraden. In Wirklichkeit hat er aber zusätzlich in der Zeit  $\Delta t$  den Winkel  $\Delta \alpha$  zurückgelegt, der von den beiden Ortsvektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  eingeschlossen wird. Sei der Betrag der Geschwindigkeit  $v$ , dann ist

$$\Delta v_{\perp} = v \Delta \alpha, \quad (1.18)$$

womit die normale Beschleunigung bei einem konstanten Betrag der Geschwindigkeit ( $|v| = \text{const.}$ )

$$a_{\perp} = v \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \quad (1.19)$$

ist. Zur Berechnung des Differenzen-Quotienten wird nun die Annahme gemacht, daß die Trajektorie als Kreisbogen mit dem Radius  $R$  approximiert werden kann, das nach Definition des Winkels gerade der Quotient aus Länge des Kreisbogens  $s$  und Radius  $R$  ist. Dann wird in der Zeit  $\Delta t$  die Strecke  $v \Delta t$  zurückgelegt:

$$\Delta \alpha = \frac{s}{R} = v \frac{\Delta t}{R} \Rightarrow \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{v}{R}, \quad (1.20)$$

so daß wir für die senkrechte Komponente der Beschleunigung

$$a_{\perp} = \frac{v^2}{R} \quad (1.21)$$

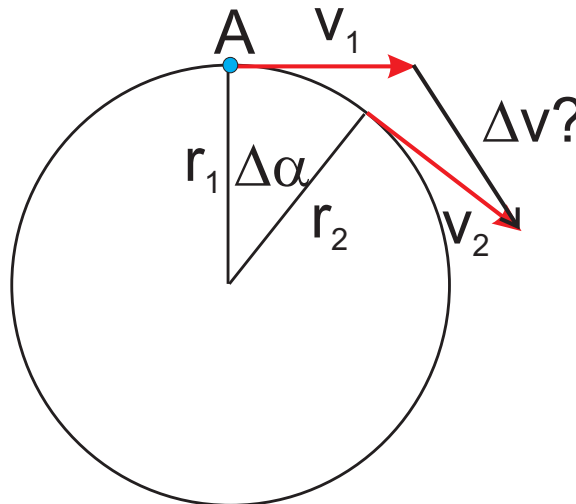
erhalten.

### 1.3.2 Kreisbewegung

Der einfachste Fall einer gekrümmten Trajektorie ist die gleichförmige Kreisbewegung. Hier ist  $\mathbf{v}$  zwar konstant, ändert jedoch kontinuierlich die Richtung.

Das Teilchen  $A$  besitzt am Punkt  $r_1$  die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  tangential zur Bahnkurve (Abb. 1.9), womit die Umlaufgeschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (1.22)$$



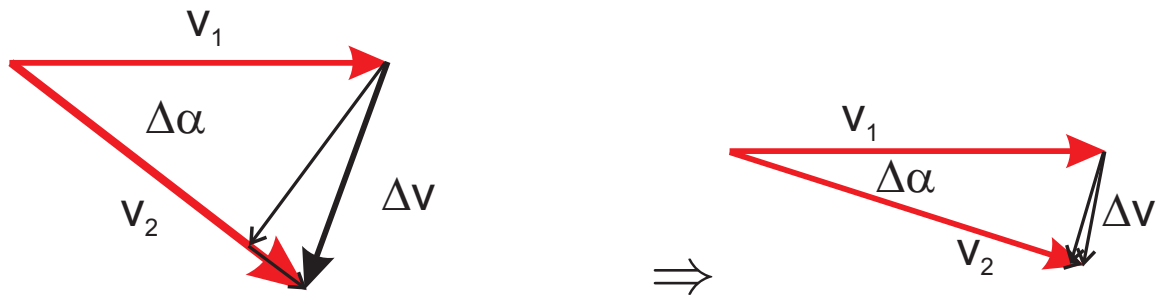
**Abb. 1.9.** Bei der Kreisbewegung ist der Betrag der Geschwindigkeit konstant.

wird. Am Punkt  $r_2$  ist die Richtung der Geschwindigkeit entsprechend der Vorwärtsbewegung auf dem Kreis eine andere, und wir können wiederum die Änderung der Geschwindigkeit in einem Differenzdiagramm anschreiben (Abb. 1.10 lks. u. re.).

Bei gleichem Betrag von  $v$  geht die parallele Komponente  $v_{\parallel}$  für kleine Kreisbögen gegen Null, und es bleibt nurmehr die senkrechte Komponente übrig. Damit wird schließlich für die Kreisbewegung

$$a = a_{\perp} = v \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = v \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}. \quad (1.23)$$

Ändert sich die Geschwindigkeit nur dem Betrage nach, sind  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  parallel. Ändert sich nur die Richtung, stehen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  senkrecht aufeinander:



**Abb. 1.10.** Bei der Kreisbewegung ist die Geschwindigkeit tangential zur zum Zentrum gerichteten Beschleunigung. Je kleiner der betrachtete Kreisbogen, um so kleiner  $v_{\parallel}$ , um so dominierender  $v_{\perp}$ .

**Satz 1.1** Die Beschleunigung eines Teilchens, das sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt, steht senkrecht zu dieser Bahn und ist zum Zentrum gerichtet.

Ändern sich sowohl Betrag wie Richtung der Geschwindigkeit, besitzt die Beschleunigung zwei Komponenten, die in eine Normalkomponente mit dem Betrag  $v^2/r$  und eine Tangentialkomponente  $\dot{v}$  zerlegbar ist.

### 1.3.3 Beispiele

Funkenflug von einer Schleifmaschine, die sich mit konstanter Drehzahl bewegt: Funken fliegen tangential (in Richtung der Bahn) weg, nicht radial nach innen. Funkenflug ist umso weiter, je höher die Drehzahl ist. Wären die Funken angegurtet, würden sie sich so wie Benutzer einer Karussells normal, d. h. senkrecht zur Bahn, um ein Zentrum bewegen.  $\Rightarrow$  Auch die Karussellfahrer bewegen sich beschleunigt, es ändert sich die Richtung der Geschwindigkeit: Normalbeschleunigung. Fliegt der Karussellfahrer tangential davon, hat er eine Momentangeschwindigkeit  $v_0$ . Die anschließende Flugbahn ist die des schiefen Wurfs: keine radiale Komponente mehr, dafür Erdbeschleunigung.

## 1.4 Aufgaben und Lösungen

### 1.4.1 Vektoren

**Aufgabe 1.1** Zeichnen Sie die Vektoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 1,2 \\ -0,6 \end{pmatrix}!$$

**Aufgabe 1.2** Welche der folgenden Größen sind Skalare und welche Vektoren? Volumen, Zentrifugalkraft, Frequenz, Dichte, Leistung, Ladung, spezifische Wärme?

**Aufgabe 1.3** Wie symbolisiert man die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Wie ist sie gerichtet? Wie ist der Wert für die doppelte Geschwindigkeit?

**Aufgabe 1.4** Gegeben sind die Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die Summe und die Differenz zeichnerisch und rechnerisch dar!

**Aufgabe 1.5** Ortsvektoren  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  vom Nullpunkt zu den Punkten  $P_1 = (2, 1, 3)$  und  $P_2 = (1, -2, -1)$ . Summe und Differenz!

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.6** Gegeben die 3 Vektoren

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der absolute Betrag von  $\mathbf{r}_3$ ? Wie groß ist die Summe  $\sum_i \mathbf{r}_i$ , wie groß die Differenz  $2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3$ ?

$$r_3 = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 1.7** Wie heißt der Einheitsvektor in Richtung der Summe

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}?$$

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der Einheitsvektor in Richtung  $\mathbf{r}$  wird gegeben durch  $\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Der Betrag ist

$$r = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Damit ist der Einheitsvektor

$$\mathbf{r}^0 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 6/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 1.8** Welche Richtungswinkel hat der Vektor

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mit den Koordinatenachsen?

**Lösung.** Betrag des Vektors ist  $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \sqrt{2}^2} = 2$ . Die Richtungs-, „Kosinusse“ sind dann

$$\cos \alpha_1 = 1/2 \Rightarrow 60^\circ; \cos \alpha_2 = -1/2 \Rightarrow 120^\circ; \cos \alpha_3 = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow 45^\circ.$$

**Aufgabe 1.9** Gegeben sind 2 zweidimensionale Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie aus den cartesischen Koordinaten

- das Skalarprodukt  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ ,
- das Betragsquadrat  $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$ ,
- den Betrag  $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|$ .

**Aufgabe 1.10** Welchen Winkel bilden die Vektoren

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

miteinander?

**Lösung.** Die Beträge der Vektoren sind

$$|r_1| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21},$$

$$|r_2| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6} \Rightarrow$$

$$|r_1 \cdot r_2| = \sqrt{126}.$$

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \sum_i x_i y_i = 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = -9$$

$$\cos \varphi = -\frac{9}{\sqrt{126}} = -0,803 \Rightarrow 143,5^\circ.$$

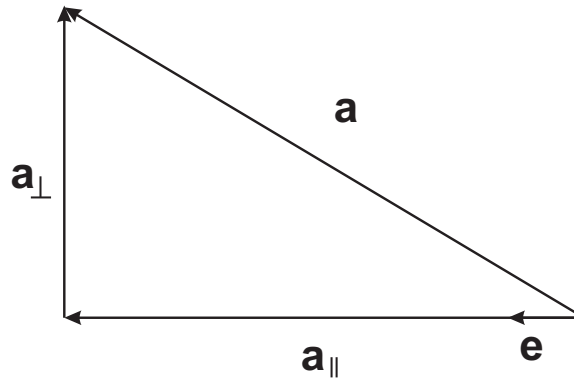
**Aufgabe 1.11** Bestimmen Sie  $x$  so, daß die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

senkrecht aufeinander stehen!

**Lösung.** Das Skalarprodukt muß Null werden.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = 5 \cdot 1 + x \cdot (-2) + 3 \cdot (-7) = 5 - 2x - 21 = -2x - 16 \Rightarrow x = -8$$



**Abb. 1.11.** Zerlegung eines Vektors  $\mathbf{a}$  in einen Parallelteil  $\mathbf{a}_{\parallel}$  und einen Orthogonalteil  $\mathbf{a}_{\perp}$  relativ zu einer Richtung  $\mathbf{e}$ .

**Aufgabe 1.12** Zerlegen Sie den Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in den Orthogonalteil  $\mathbf{a}_{\perp}$  und den Parallelteil  $\mathbf{a}_{\parallel}$  relativ zum Vektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}!$$

**Lösung.**

Gefragt ist nach der Projektion des Vektors  $\mathbf{a}$  auf den Vektor  $\mathbf{r}$ . Nach Abb. 1.2 ist der zu  $\mathbf{r}$  parallele Anteil

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{r}| |\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{r}),$$

der mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{r}^0$  zu multiplizieren ist, so daß die Zielgleichung lautet

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{r}^0 \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r} \right) |\mathbf{a}|.$$

Daher müssen wir  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$  ausrechnen und benötigen die Beträge von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{r}$ .

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -2 + 3 - 4 = -3.$$

$$r = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}.$$

Die Projektion des Vektors  $\mathbf{a}$  auf den Vektor  $\mathbf{r}$  ist also

$$\sqrt{29} \cdot \frac{-3}{\sqrt{3}\sqrt{29}} = -\sqrt{3}.$$

$$\mathbf{r}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{a}_{\parallel} = -\mathbf{r}.$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{a}_{\perp} = 1 - 4 + 3 = 0.$$

### 1.4.2 Translation

**Aufgabe 1.13** Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit in Stundenkilometern für den Weltrekord im 100 m Lauf (9,78 sec) und beim Marathonlauf (2 h 10 min).

**Lösung.** 36,81 km/h; 19,38 km/h

**Aufgabe 1.14** Der Zeitunterschied bei der Hahnenkammabfahrt 1975 (2500 m) zwischen FRANZ KLAMMER und GUSTAV THÖNI betrug bei 2 min 05 sec genau eine Tausendstelsekunde. Was machte das an Skilängen im Ziel aus (Skilänge 220 cm)?

**Lösung.**  $v = 20$  m/s;  $\Delta s = v\Delta t = 2$  cm  $\approx 1$  %.

**Aufgabe 1.15** Bei dem von RUBENS sen. ausgehobenen Brunnen unterhalb des Dillenburger Schlosses dauert es vier Sekunden, bis man den Aufschlag eines hineinfallenden Steins hört.

- Wie tief ist der Brunnen?
- Muß man um die Schallgeschwindigkeit  $c_s$  (etwa 335 m/sec) korrigieren (Luftwiderstand vernachlässigen)? Versuchen Sie eine entweder eine iterative Antwort, indem Sie in erster Näherung die Laufzeit des Schalls vernachlässigen, und dann eine zweite Näherung durchführen, oder eine analytische Antwort, indem Sie zeigen, für welche Tiefen die Laufzeit-Korrektur vernachlässigbar ist.

**Iterative Lösung.**

$$t = t_1 + t_2; t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \wedge t_2 = \frac{h}{c_s}. \quad (1)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c_s} \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} + \frac{2h}{c_s} \sqrt{\frac{2h}{g}} + \left(\frac{h}{c_s}\right)^2 \quad (2)$$

Da diese Gleichung nicht so einfach zu lösen ist, überlegen wir uns, für welche Tiefe das Schallglied zu vernachlässigen ist. Dabei nehmen wir einen Fehler von 10 % an.

$$t = h \left( \frac{1}{c_s} + \sqrt{\frac{2}{gh}} \right) : \quad (3)$$

$$h = \frac{c_s^2}{50g} = 217,8 \text{ m} : \quad (4)$$

Erst für 217,80 m wird der Fehler 10 %! Für kleinere Tiefen ist das Schallglied also vernachlässigbar:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = 78,5 \text{ m}. \quad (5)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \Rightarrow t^2 = \frac{2h_0}{g} \Rightarrow h_0 = \frac{t^2g}{2} = 78,5 \text{ m}. \quad (6)$$

$$t_s = \frac{80}{335} = 0,24 \text{ sec} \Rightarrow t_1 = 3,76 \text{ sec}. \quad (7)$$

$$h_1 = \frac{t_1^2g}{2} = 69 \text{ m}. \quad (8)$$

**Analytische Lösung.**

$$t = t_1 + t_2 \Rightarrow t_2 = t - t_1 \wedge s_1 = s_2 = h; \quad (9)$$

$$\frac{g}{2}t_1^2 = (t - t_1)c_s; \quad (10)$$

$$t_1^2 = \frac{2(t - t_1)c_s}{g}; \quad (11)$$

$$t_1^2 + 2\frac{c_s}{g}t_1 = 2\frac{c_s}{g}t; \quad (12)$$

$$\left(t_1 + \frac{c_s}{g}\right)^2 = 2\frac{c_s}{g}t + \left(\frac{c_s}{g}\right)^2. \quad (13)$$

$$t_1 = 3,78 \text{ sec}. \quad (14)$$

$$h = 67,65 \text{ m}. \quad (15)$$

**Aufgabe 1.16** In einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zug wird ein Ball nach oben geworfen. Warum kommt er wieder in die Hand, obwohl der Zug sich weiter bewegt hat?

**Lösung.** Als mitbewegter Körper hat und behält der Körper wegen seines Beharrungsvermögens (seiner Trägheit) die gleiche Geschwindigkeit wie die anderen gleichförmig bewegten Gegenstände im Zug.

**Aufgabe 1.17** Aus welcher Höhe muß ein Automobil fallen, damit es mit 120 km/h ankommt?

**Lösung.**

$$t = \frac{v}{g} = \frac{33}{10} \text{ m/sec} = 3,3 \text{ m/sec.} \quad (1)$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 11 \text{ m} = 55 \text{ m.} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow \frac{v^2}{2g} = h. \quad (3)$$

**Aufgabe 1.18** Ein Auto, das mit  $-6 \text{ m/sec}^2$  bremsen kann, fährt bei Sichtweite 50 m auf einer Landstraße, die Reaktionszeit des Fahrers beträgt 0,3 sec. Wie hoch darf die maximale Geschwindigkeit sein, um rechtzeitig stoppen zu können?

**Lösung.** Gefragt ist nach  $v_0$ .

1. Wie lang ist die während der Reaktionszeit zurückgelegte Strecke?

$$s_1 = v_0 \cdot t_1 \quad (1)$$

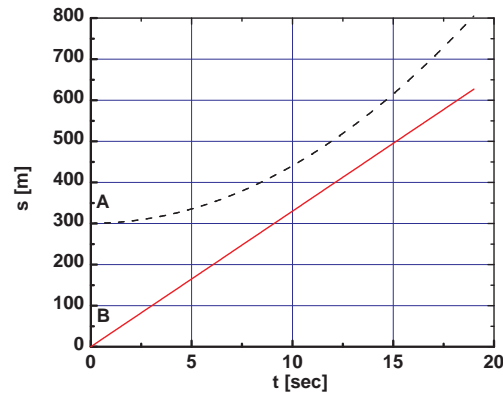
2. Die Bremszeit ist die Zeit, die benötigt wird, um von  $v_0$  auf  $v = 0$  zu kommen:

$$v = 0 = v_0 + a_B t_2 \Rightarrow t_2 = -\frac{v_0}{a_B}; \quad (2)$$

die Bremsstrecke ist folglich:

$$s_2 = \frac{1}{2}a_B t_2^2 = -\frac{1}{2}a_B \left(\frac{v_0}{a_B}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_B}. \quad (3)$$

$$s = s_1 + s_2 = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_B} \quad (4)$$



**Abb. 1.12.** Die graphische Lösung der individuellen  $s(t)$ -Kurven zeigt, daß die größte Annäherung der beiden Fahrzeuge nach etwa 12 sec stattfindet, wenn die Geschwindigkeit der Fahrzeuge gleich geworden ist.

$$2a_B s = 2a_B v_0 t_1 - v_0^2 \quad (5)$$

$$(a_B t_1)^2 - 2a_B s = (v_0 - a_B t_1)^2 \quad (6)$$

$$v_0 = \sqrt{a_B^2 t_1^2 - 2a_B s} + a_B t_1 : \quad (7)$$

$$v_0 = 22,8 \text{ m/sec} = 82 \text{ km/h.} \quad (8)$$

**Aufgabe 1.19** An der Einfahrt einer belebten Autobahn steht ein Wagen  $A$ , der in 15 sec auf 150 km/h beschleunigen kann. Es nähert sich ein Kfz  $B$  mit 120 km/h.

- Wie weit muß  $B$  von  $A$  noch entfernt sein, damit der Sicherheitsabstand von  $s_0 = 150 \text{ m}$  nie unterschritten wird?
- Wann findet die größte Annäherung statt?

**Lösung.** Der Beschleunigungswert des Wagens  $A$  ist

$$a = \frac{150000/3600}{15} \text{ m/sec}^2 = 2,78 \text{ m/sec}^2. \quad (1)$$

Aus dem Weg-Zeit-Diagramm ist ersichtlich, daß der kürzeste Abstand nach wenigen Sekunden erreicht wird.

$$s_A = \frac{1}{2}at^2 \wedge s_B = v_B t - s_0, \quad (2)$$

$$\Delta s = s_A - s_B = \frac{1}{2}at^2 - v_B t + s_0. \quad (3)$$

Minimum liegt vor, wenn die 1. Ableitung Null ist:

$$\frac{d\Delta s}{dt} = 0 = at - v_B \Rightarrow t_{\min} = \frac{v_B}{a} = 11,8 \text{ sec.} \quad (4)$$

Folglich ist der geforderte Sicherheitsabstand  $s_0$

$$\Delta s_{\min} = \frac{1}{2}at_{\min}^2 - v_B t_{\min} + s_0 \Rightarrow s_0 = \Delta s_{\min} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{a} = (150 + 194) = 344 \text{ m.} \quad (5)$$

### 1.4.3 Überlagerung von Bewegungen

**Aufgabe 1.20** Sie haben ein Business-Class-Ticket entweder für München-Kapstadt oder München-JFK gewonnen (die Strecken sind etwa gleich lang). Sie wissen, daß auf der Transatlantik-Strecke auf dem Hinflug der *Jet-Stream* mit der West-Ost-Geschwindigkeit  $w$  das Vorwärtskommen behindert, auf dem Rückflug es dagegen unterstützt. Auf welcher Route sind Sie länger in der Luft (und an der Rotwein-Tränke)?

**Lösung.** Die Gesamtflugzeit ist die Summe der Quotienten aus Einzelstrecke und Einzelgeschwindigkeit:

$$T = \frac{d}{v+w} + \frac{d}{v-w} = \frac{2dv}{v^2 - w^2}.$$

Ist z. B.  $w = \frac{1}{4}v$ , folgt  $T = \frac{8}{7} \frac{2d}{v}$ , ist  $w = \frac{1}{2}v$ , wird  $T = \frac{4}{3} \frac{2d}{v}$ . Besonders empfehlenswert ist der Trip nach JFK also zur Zeit der Herbststürme.

**Aufgabe 1.21** Ein Stein wird mit 10 m/sec in  $x$ -Richtung waagrecht von einem 60 m hohen Turm geworfen. Beschreiben Sie die Flugbahn! Wie verläuft die Flugbahn, wenn der Sportler sich selbst in einem offenen Fahrstuhl mit 60 km/h nach oben, aber senkrecht zu der Wurfrichtung bewegt?

**Lösung.**

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = 3,5 \text{ sec.}$$

$$s_x = 35 \text{ m.}$$

$$v_{\uparrow} = 16,7 \text{ m/sec.}$$

$$\text{Steigzeit } T_0 = \frac{v_0}{g} = 1,7 \text{ sec.}$$

$$\text{Wurfhöhe } H = v_0 T_0 - \frac{1}{2} g T_0^2 = \frac{v_0^2}{2g} = 13,95 \text{ m}$$

**Aufgabe 1.22** Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeit einer Granate aus einem auf Erdhöhe fixierten Kanonenrohr, wenn sie in 4900 m wieder auf den Boden trifft! Winkel des Kanonenrohrs zum Boden  $30^\circ$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**Lösung.**

Die Steigzeit  $T_1$  bzw. Flugzeit  $T$  ist

$$T_1 = \frac{v_{y,0}}{g} = \frac{v_0 \sin \varphi}{g} \Rightarrow T = \frac{2v_0 \sin \varphi}{g}, \quad (1)$$

$$x = v_{x,0} T = 2v_0 \cos \varphi T \Rightarrow x = v_0 \cos \varphi \frac{2v_0 \sin \varphi}{g}, \quad (2)$$

$$x = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos \varphi \sin \varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi. \quad (3)$$

$$v_0^2 = \frac{xg}{\sin 2\varphi} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{xg}{\sin 2\varphi}}. \quad (4)$$

$$30^\circ: \sqrt{\frac{4900 \cdot g}{1/2 \sqrt{3}}} = 237 \text{ m/s.}$$

**Aufgabe 1.23** Wenn eine Raumkurve beschrieben werden kann durch

$$x(t) = 4 \text{ m/sec}^2 + 2 \text{ m/sec} + 5 \text{ m,}$$

Wo befindet sich der Körper nach 5 und nach 10 sec? Welche Geschwindigkeit hat er zu diesen Zeitpunkten? Was können Sie über die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum sagen?

**Lösung.**

$$s(5 \text{ sec}) = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 5 = 65 \text{ m.}$$

$$s(10 \text{ sec}) = 2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 225 \text{ m.}$$

$$\bar{v}_1 = 12 \text{ m/sec}; \bar{v}_2 = 22 \text{ m/sec.}$$

**Aufgabe 1.24** Bestimmen Sie aus der allgemeinen Bahnkurve (1.12) für den schiefen Wurf

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

die Werte der Momentangeschwindigkeit am Start, am Scheitelpunkt und beim Auftreffen auf den Boden.

**Lösung.**

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y - g t \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Steigzeit ist  $T_1 = v_y/g$ , die Flugzeit ist  $T = 2T_1 = 2v_y/g$ .

$$\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}(T_1) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y - v_y = 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(T) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y - 2v_y = -v_y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

**Aufgabe 1.25** Bei Schießübungen auf bewegte Objekte werden von einem 30 m ( $s_1$ ) hohen Baum Kugeln herabfallen gelassen, die von einem in 100 m Bodentfernung ( $s_2$ ) entfernt liegenden Schützen zu treffen sind. Geschwindigkeit der Geschosse: 240 m/s. Wohin muß der Schütze zielen, wenn Fall und Schuß gleichzeitig erfolgen, wohin, wenn er sich um eine halbe Sekunde verspätet? Rechnen Sie mit rasanter Flugbahn unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes!

**Lösung.** Die absolute Lösung geht von einem rechtwinkligen Dreieck aus, dessen eine Kathete 100 m mißt, die zweite  $30 - y$  m, die Hypothenuse  $z = v \cdot t$ , wobei  $v = 240$  m/s sind. Man bekommt dann nach PYTHAGORAS:

$$100^2 + (30 - y)^2 = v^2 t^2;$$

mit

$$y = \frac{1}{2} g t^2.$$

Einsetzen (alles in m/s):

$$10\,900 \text{ m}^2 = t^2 \left( v^2 + 30g \text{ m} - \frac{1}{4} g^2 t^2 \right).$$

Bei Vernachlässigung des in  $t$  biquadratischen Gliedes wird

$$t = \sqrt{\frac{10900}{v^2 + 30g}}$$

$$t = 0,424 \text{ sec} \Rightarrow s = 30 - 0,88 = 29,12 \text{ m.}$$

1. Iteration:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} \wedge s_3 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = 104,4 \text{ m.}$$

$$t_3 = \frac{s_3}{v} = 0,435 \text{ sec.}$$

2. Iteration:

$$s_1 = 30 - \frac{1}{2}g \cdot 0,435^2 = 29,05 \text{ m.}$$

$$s_3 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = 104,13 \text{ m.}$$

$$t_3 = \frac{s_3}{v} = 0,434 \text{ sec.}$$

**Aufgabe 1.26** Beschreiben Sie mit den Gleichungen des Schiefen Wurfs nach oben, daß die Wurfweite bei einem Steigungswinkel von  $45^\circ$  ihr Maximum besitzt! Machen Sie dazu eine kleine Skizze, aus der die Zerlegung der Bewegung ersichtlich wird! Die Steigzeit ist gegeben durch  $T = v_{0,y}/g$ , die Flugzeit durch den doppelten Wert, die Additionstheoreme sind (je nach Herleitung)  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$  oder  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .

**Lösung.**

s. Aufgabe 2.7:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi. \quad (1)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\varphi = 0. \quad (2)$$

$$\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \arccos 0 \Rightarrow 2\varphi = 90^\circ. \quad (3)$$

## 1.4.4 Rotation

**Aufgabe 1.27** Für eine Kreisbahn gilt

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x t \\ r_y t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Bestimmen Sie

- den Betrag von  $\mathbf{r}(t)$ ;
- den Winkel zwischen Radiusvektor und Geschwindigkeit und
- den Winkel zwischen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung.

**Lösung.**

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{r^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = \sqrt{r^2} = r = \text{const.} \quad (1)$$

Die Winkel zwischen Vektoren werden nach Abschn. 1.1 durch Bildung des Skalarprodukts ermittelt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \cdot r \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix} = \quad (2)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r^2(-\omega \cos \omega t \sin \omega t + \omega \sin \omega t \cos \omega t) = 0. \quad (3)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = r \begin{pmatrix} -\omega^2 \cos \omega t \\ -\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} \cdot r \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (4)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = (r\omega)^2(\cos \omega t \sin \omega t - \sin \omega t \cos \omega t) = 0. \quad (5)$$



## 2 Metrologie

Alle physikalischen Größen werden in bestimmten *Einheiten* gemessen. Die Messung einer Größe besteht in der Verhältnisbildung zu einem Standard, der Eins gesetzt wird. Grundsätzlich ist für jede physikalische Größe jede beliebige Einheit denkbar. Da aber zwischen den verschiedenen Größen Abhängigkeiten bestehen, lassen sich nur für einige Grundgrößen *Grundeinheiten* wählen. Die daraus für andere Größen folgenden Einheiten nennt man *abgeleitete Einheiten*.

In der Physik stellen Länge (Meter), Zeit (Sekunde) und Masse (Kilogramm) Grundgrößen dar (MKS-System). Die Wahl dieser Grundeinheiten hat sich als praktisch günstig erwiesen. Das Symbol kg heißt *Dimension* der Masse, und man schreibt

$$[m] = \text{kg}. \quad (2.1)$$

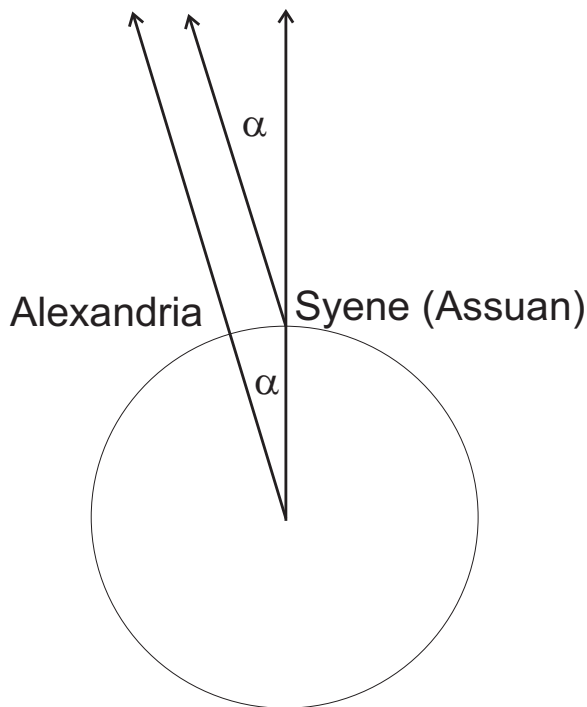
Einheit einer abgeleiteten Größe (Geschwindigkeit): Verhältnis des Wegs zur Zeit. Einheit: Geschwindigkeit, bei der in einer Sekunde ein Meter zurückgelegt wird. Das Symbol m/s heißt *Dimension* der Geschwindigkeit, und man schreibt

$$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (2.2)$$

Eine physikalische Größe ist damit ein Produkt aus einem Zahlenwert und einer physikalischen Einheit, so, wie der Preis ein Produkt aus einer Zahl und einer Währungseinheit ist.

Falsche Aussagen:

- Die Geschwindigkeit ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg: Die Geschwindigkeit ist kein Weg, sondern der Quotient Weg/Zeit.
- Die Frequenz ist die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde: Die Frequenz ist der Quotient Anzahl/Zeit, außerdem muß man das allgemein . . . „pro Zeiteinheit“ sagen.
- Stundenkilometer? Gehört in die Kategorie zusammengesetzter Substantive (Monatseinkommen, Tagesstunde, Nachtstunde, Frühlingsbeginn . . .). Man versteht darunter also die (zurückgelegten) Kilometer der Stunde. Früher hängte man an den weiblichen Genitiv Singular ein -n („Wer zählt der Stunden Zahl?“, so, wie dem männlichen Dativ ein -e: dem Freunde). Stundenkilometer sind also völlig korrekt!



**Abb. 2.1.** ERATOSTHENES maß den Einfallswinkel der Sonnenstrahlung am Sommeranfang in Alexandria und im 555 km entfernten Syene, die um  $5^\circ$  voneinander abwichen, und errechnete daraus für den Erdumfang 40 000 km.

## 2.1 Längenmessung

Von den Römern wurden „menschliche“ Maße übernommen: 1 Meile = 1000 Doppelschritte einer römischen Legion. In der französischen Revolution wurden „unmenschliche“ Erdmaße gewählt:

$$1 \text{ m} = \frac{1}{40 \cdot 10^6} \cdot \text{Pariser Meridian.} \quad (2.3)$$

Eichmaß aus Platin/Iridium von 1792 im Büro für Maß und Gewicht in Paris. Nachmessungen ergaben Fehler, daher nun Definition über eine Wellenlänge des Edelgases Krypton.

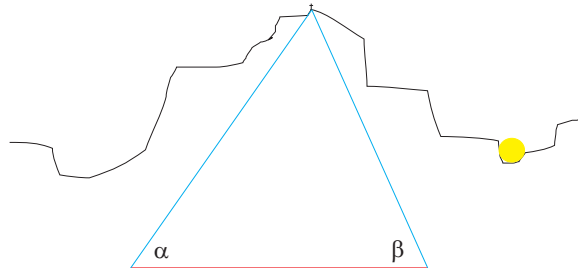
Wie kam man auf  $1/40$  Millionstel Umfang des Äquators (eigentlich ist es  $1/10$  Millionstel des Erdquadranten)? Erste Messungen von ERATOSTHENES, 240 v. Chr. (Abb. 2.1). Am Sommeranfang steht die Sonne in Syene, dem heutigen Assuan, mittags senkrecht, also  $90^\circ$ , im 555 km entfernten Alexandria dagegen nur auf  $85^\circ$ . Wäre die Erde also eine Kugel, dann müßte der Umfang

$$\frac{360}{5} \cdot 555 = 40000 \text{ km} \quad (2.4)$$

betragen.



**Abb. 2.2.** Die Messung sehr kleiner Strukturen ist schließlich nur mit dem Mikroskop möglich. Eichstandards helfen beim Größenvergleich (etwa Okularmaßstab beim Lichtmikroskop).



**Abb. 2.3.** Die Höhe eines Berges wird trigonometrisch von zwei verschiedenen Punkten bestimmt, deren Entfernung genau bekannt ist.

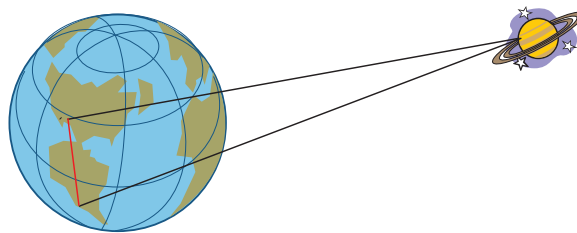
Messung kleiner Längen mit Schieblehre und Mikrometerschraube, Eichstandards beim Mikroskopieren (Abb. 2.2).

Messung großer Längen trigonometrisch mittels

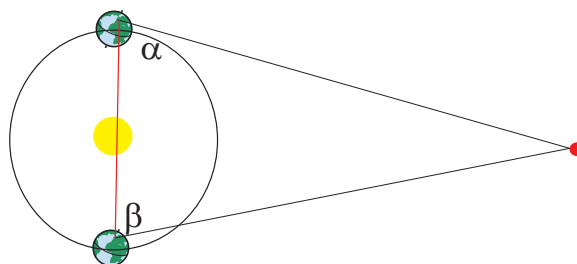
- einer Messung (z. B. Höhe eines Berges, Abb. 2.3) oder
- zweier Messungen von verschiedenen Punkten auf der Erde, deren Entfernung genau bekannt ist (Abb. 2.4) oder
- zweier Messungen, die ein halbes Jahr auseinander liegen (Basislänge 300 Mio. km) oder mit besonderen astronomischen Tricks (Fixsternparallaxe, Cepheiden-Hypothese ...). Einheiten: Lichtjahr, Parsec (Abb. 2.5).

Tabelle 2.1. Längen und Beispiele

<i>metr. Länge</i>	<i>nichtmetr. Länge</i>	<i>Beispiel</i>
km	Meile	1000 Doppelschritte
m	Schritt, Elle	Mensch
cm	Fuß, Zoll	Fuß, Fingerglied
mm – 0,1 mm		Nageldicke
0,01 mm		Haardicke
<i>metr. Masse</i>	<i>nichtmetr. Masse</i>	<i>Beispiel</i>
kg	Pfund, Stein (stone),...	
<i>metr. Zeit</i>	<i>nichtmetr. Zeit</i>	
	24 Stunden	Tag
	31 Tage	(langer) Monat
	365 Tage	Jahr
	11 Jahre	Sonnenflecken-Zyklus
	26 000 Jahre	Präzessionszyklus der Erde



**Abb. 2.4.** Die Entfernung eines Planeten wird trigonometrisch von zwei verschiedenen Punkten auf der Erde bestimmt, deren Entfernung genau bekannt ist.



**Abb. 2.5.** Die Entfernung eines Fixsterns (hier eines Roten Riesen wie Aldebaran oder Betageuze) wird trigonometrisch von zwei verschiedenen Punkten auf der Umlaufbahn der Erde bestimmt, deren Entfernung 300 Mio. km voneinander beträgt.

## 2.2 Winkelmessung

Ebene Winkel werden in *Gradmaß* gemessen:  $1^\circ$  ist  $1/360$  des Kreises. In Rechnungen verwendet man das *Bogenmaß*:

$$\alpha = \frac{\text{Kreisbogenlänge } l}{\text{Radius } r}, \quad (2.3)$$

wobei die Einheit rad ist:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,295^\circ. \quad (2.4)$$

Der Raumwinkel ist definiert durch

$$\Omega = \frac{\text{Kugelfläche } A}{(\text{Radius } r)^2}, \quad (2.5)$$

die Einheit heißt *Steradian* (*sterad* oder *sr*).

## 2.3 Zeitmessung

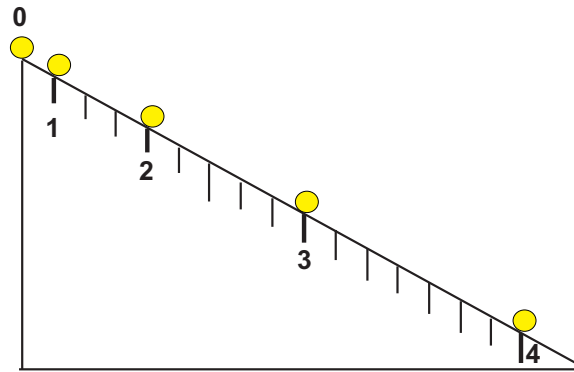
Entweder Zeitpunkt oder Zeitdauer. Länge wird durch 2 Punkte bestimmt, Zeitlänge wird durch 2 Zeitpunkte bestimmt. Maßstab für die Zeitmessung ist die Uhr: Mechanismus zum Abzählen gleichförmig wiederkehrender, also periodischer, Vorgänge (Umlauf oder Schwingung). Was ist gleichförmig? Durch ein Meßverfahren wird z. B. ermittelt, ob die Durchschnittsgeschwindigkeit gleich der Momentangeschwindigkeit ist  $\Rightarrow$  so wird ein Standard etabliert, der allen anderen Verfahren überlegen ist.

### 2.3.1 Messung langer Zeiten und Zeiträume

Früher: Rotation der Erde (um sich selbst. Sterntag oder Sonnentag), heute: Revolution der Erde (um die Sonne). Warum: Rotation der Erde schwankt (Gezeitenreibung, im März ist die Rotationsdauer um immerhin 1,5 msec länger als im Juli). Die Jahreslänge wurde mit dem tropischen Jahr 1900 definiert: zwei aufeinanderfolgende Durchgänge der Sonne durch den Frühlingspunkt. Die Wahl eines bestimmten Jahres erfolgte deshalb, weil die tropischen Jahre nicht konstant sind und pro Jahrhundert um 0,5 sec abnehmen.

### 2.3.2 Messung kurzer Zeiten und Zeiträume

Beim freien Fall ist offensichtlich, daß in viel zu kurzen Zeiträumen zu viel Weg „verbraucht“ wird, um als Zeitmesser zu dienen. GALILEI benutzte daher für seine Fallversuche am Schiefen Turm seinen Herzschlag und zusätzlich eine Schiefe Ebene (Abb. 2.6). Er fand eine quadratische Abhängigkeit der zurückgelegten Wegstrecke in



**Abb. 2.6.** Die Messung kurzer Zeitintervalle wird auf Teilung eines Längenmaßes (hier: Schiefe Ebene) zurückgeführt (G. GALILEI). Nachdem er dieses Zeitmeßinstrument erfunden hatte, konnte er die spektakuläre *Rappresentazione* am Schiefen Turm zu Pisa durchführen.

Abhängigkeit der Zahl seiner Herzschläge. Damit hatte er umgekehrt ein allerdings aperiodisches Zeitnormal zur Messung sehr kurzer Zeiträume erfunden.

Schließlich aber fand er mit der Pendeluhr ein hinreichend genaues Instrument, um kurze Zeiten zu messen.

Dabei hatte er wohl das Prinzip der Sanduhr mit einem periodischen Maß quantifiziert, denn die Sanduhr ist eigentlich das Gegenteil einer Uhr: Es wird ein extrem nichtperiodischer Vorgang benutzt, um eine Zeitlänge zu bestimmen.

Fallschnur: Kugeln an einer Schnur, deren Abstand quadratisch zunimmt.

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \quad (2.6)$$

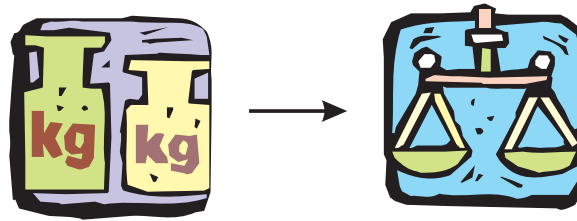
Beim Herabfallen schlagen die Kugeln in gleichem Zeitintervall auf.

## 2.4 Masse

Wir definieren im Schwerfeld der Erde die Masse über das Gewicht (Abb. 2.7). Die zahlreichen unterschiedlichen Einheiten (Stein, Pfund ...) wurden während der Französischen Revolution auf das metrische System umgestellt. Das Ur-Kilogramm aus einer Legierung aus 90 % Platin und 10 % Iridium wird noch heute in Paris aufbewahrt.

## 2.5 Aufgaben und Lösungen

**Aufgabe 2.1** Welcher Länge entsprechen  $1^\circ$ ,  $1'$  und  $1 \text{ rad}$  am Äquator ( $U = 40\,000 \text{ km}$ )?



**Abb. 2.7.** Massen werden durch vergleichende Messung ihres Gewichts bestimmt (s. Abschn. 3.1).

**Lösung.**

$$1^\circ = 40000/360 = 111,111 \text{ km.}$$

$$1' = 40000/(360 \cdot 60) = 1,852 \text{ km} = 1 \text{ Seemeile.}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 111,111 = 6366 \text{ km.}$$

**Aufgabe 2.2** Wie kommt im Film der optische Eindruck des „Rückwärtslaufens“ von Kutschenrädern, Hubschrauberrotoren . . . zustande (Fernsehbild-Wiederholffrequenz  $\nu = 25/\text{sec}$ )? Errechnen Sie die Geschwindigkeit einer Kutsche bei einem Raddurchmesser von 37 Zoll und  $S = 24$  Speichen pro Rad! Wann tritt der Effekt auf?

**Lösung.** Das Rad drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2\pi\nu$ . Es scheint genau dann stillzustehen, wenn anstelle der Speiche  $A$  innerhalb des Zeitraums  $T = 1/\nu$  gerade eine andere Speiche ( $A + 1, A + 2, \dots$ ) exakt denselben Platz einnimmt (was natürlich für einen ordentlichen Wagner (engl. Cartwright) Ehrensache war), allgemein als  $T = i/\nu$ .

$$v = r\omega = \frac{2\pi i r \nu}{S} \Rightarrow i \cdot 3,08 \text{ m/sec} = i \cdot 11,1 \text{ km/h.}$$

**Aufgabe 2.3** Wie hoch ist die Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne, die des Mondes um die Erde, die eines Punktes am Äquator und am Nordpol? Radius der Erdbahn: 150 Mio km, Radius der Mondbahn: 384 000 km, Umfang am Äquator: 40 100 km.

**Lösung.**

$$\frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ sec}} = 29,7 \text{ km/sec} = 108000 \text{ km/h.}$$

$$\frac{2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^5 \text{ km}}{27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ sec}} = 1,02 \text{ km/sec} = 3600 \text{ km/h.}$$

$$\frac{4,01 \cdot 10^4 \text{ km}}{(365/366) \cdot 24 \cdot 3600 \text{ sec}} = 0,465 \text{ km/sec} = 1670 \text{ km/h.}$$

$$0 \text{ km/sec.}$$

**Aufgabe 2.4** Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeiten von Sekundenzeiger bzw. Minutenzeiger, kontinuierliches Vorrücken vorausgesetzt?

**Lösung.**

$$\omega = \frac{2\pi}{60 \text{ s}} = 0,105 \text{ s}^{-1}. \quad (1)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}. \quad (2)$$

**Aufgabe 2.5** Bauen Sie mit Kugeln und einer Schnur ein Einmal-Metronom für die 8 sehr gleichmäßig zu spielenden Viertel am Beginn des Finales der 8. BRUCKNER! (MM = 69 Halbe)!

**Lösung.** Fallschnur mit insgesamt 9 Kugeln für 8 Intervalle und 8 Töne.

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$t = \frac{4/2}{69/2} \cdot 60 = 3,48 \text{ sec}$$

$$s = \frac{9,81}{2} 3,51^2 = 59,34 \text{ m}$$

# 3 Prinzipien der Mechanik

## 3.1 Der Begriff der Kraft

### 3.1.1 Schwere Masse

Alle Körper sind schwer. Im Anziehungsbereich der Erde greift an ihnen eine Kraft an, die man das Gewicht nennt. Zur quantitativen Messung des Gewichts verwendet man Schraubenfedern. Das Gewicht ist der Dehnung proportional:

$$G \propto \Delta x. \quad (3.1)$$

Man kann eine durch bekannte Gewichte geeichte Schraubenfeder zur Messung einer Kraft verwenden. Ein solches Gerät bezeichnet man als Dynamometer.

### 3.1.2 Träge Masse

Alle Körper sind träge. Sie ändern ihre Geschwindigkeit nie von selbst, sondern nur unter der Einwirkung einer Kraft. Da Körper vom gleichen Gewicht durch gleiche Kräfte gleich beschleunigt werden, und bei verschiedenen Gewichten die Kräfte, die zur gleichen Beschleunigung benötigt werden, den Gewichten proportional sind, sind Trägheit und Schwere auf das engste miteinander verknüpft. Die Trägheit wird durch die Masse eines Körpers gemessen.

**Beispiel 3.1.** Freier Fall:  $m: 80 \text{ kg}$ ,  $g: {}^1 9,81 \text{ m/sec}^2 \Rightarrow F = 785 \text{ N} = 80 \text{ kp}$ . Geschwindigkeit und Weg nach 5 sec:  $v = gt + v_0 = 9,81 \cdot 5 = 49,05 \text{ m/sec}$ ;  $s = \frac{1}{2}gt^2 = 122,6 \text{ m}$ .

Bei einem homogenen Körper ist die Masse dem Volumen proportional:

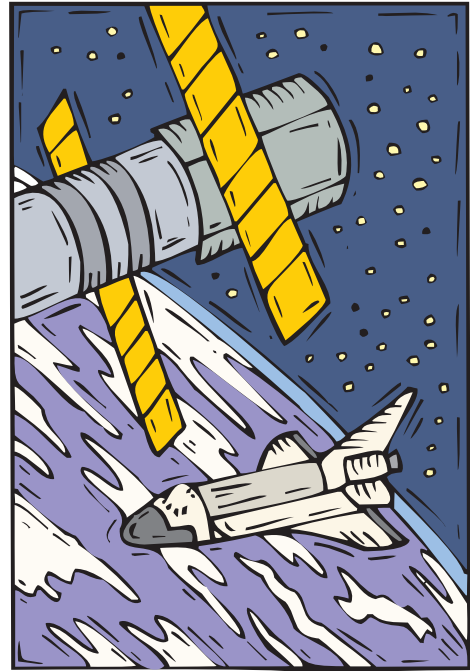
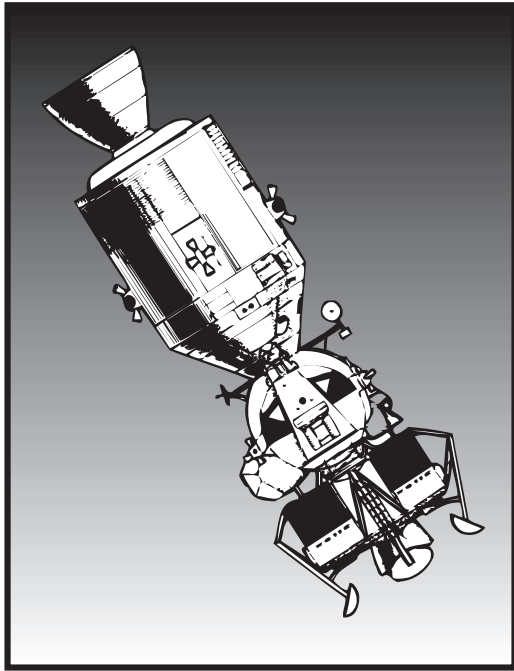
$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}; \rho = \frac{m}{V}. \quad (3.2)$$

1. NEWTONSches Axiom (Trägheitsgesetz): Ein Körper ändert seine Geschwindigkeit nur unter dem Einfluß von Kräften.

Definition der Kraft: 1 Newton (N) ist die Kraft, die 1 kg mit  $1 \text{ m/sec}^2$  beschleunigt.

---

<sup>1</sup> $g$  für Gravitation.



**Abb. 3.1.** Auf dem Weg zum Mond waren die Astronauten (und auch das Inventar an Bord) kräftefrei. Gleiches gilt auch auf einer Erdumlaufbahn.

**Beispiel 3.2.** Das Sinken einer Kugel in zäher Flüssigkeit erfolgt kräftefrei, weil die Schwerkraft durch die ihr entgegengesetzt gerichtete, gleich große Reibungskraft kompensiert wird. Daher verläuft die Bewegung gleichförmig und geradlinig.<sup>2</sup>

**Beispiel 3.3** Situation im Raumschiff. Weg zum Mond, Umlauf (Orbit) um die Erde (Abb. 3.1).

## 3.2 Inertialsystem

Wie wir an der Diskussion der Bewegung eines Raumschiffs leicht sehen, wird seine Bewegung natürlicherweise auf ein anderes System, das „ruhende“ System der Erde, bezogen. Eine Bewegung ist immer relativ. Es ist sinnlos, von der nicht auf andere Objekte bezogenen absoluten Bewegung eines Körpers zu sprechen. Die Relativität der Bewegung hängt mit der Relativität des Raums zusammen. Da es keine Anordnung eines Objekts im absoluten Raum, unabhängig von anderen Körpern, gibt, können wir immer nur die Anordnung dieses Objekts in bezug auf andere Körper angeben.

Unter *Bezugssystem* wollen wir eine Gesamtheit von Körpern verstehen, die man nach Vereinbarung als unbeweglich ansieht, und auf die man sich bei der Beschreibung der Bewegung anderer Objekte bezieht. Jeder Körper ruht im körpereigenen Bezugs-

<sup>2</sup>Wir werden später ein solches Beispiel errechnen.

system, bewegt sich jedoch in anderen Bezugssystemen. Einen Körper, der so weit entfernt von allen anderen Körpern ist, daß diese ihn nicht beeinflussen, bezeichnen wir als *frei bewegt* und formulieren damit das 1. NEWTONsche Axiom etwas anders:

**Satz 3.1** 1. NEWTONsches Axiom: *Ein kräftefreier Körper bewegt sich frei bewegt, und zwar geradlinig gleichförmig.*

*Mechanisches Relativitätsprinzip:* Gegeneinander geradlinig gleichförmig bewegte Koordinatensysteme sind in bezug auf die Darstellung der Gesetze der Mechanik gleichwertig. Ein derartiges System wird Inertialsystem [inertia: Trägheit (lat.)] genannt. Die Unterscheidung zwischen Ruhe und geradlinig gleichförmiger Bewegung ist nur von der Wahl des Bezugssystems abhängig. Absolute Ruhe ist nicht feststellbar. Daher können wir zwar mittels der Untersuchung der freien Bewegung Inertialsysteme nicht voneinander unterscheiden, andererseits haben alle physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen dieselbe Form.<sup>3</sup> Es gibt allerdings physikalische Größen, die wirklich invariant, also von der Wahl des Inertialsystems absolut unabhängig sind, etwa der Abstand zweier Punkte, die Teilchenmasse, aber auch die Energie.

**Beispiel 3.4.** ICE bei konstanter Endgeschwindigkeit von 300 km/h. Dem einzigen Zugkellner fällt die Champagner-Flasche zu Boden. Beobachtung des Kellners: sie fällt senkrecht nach unten. Beobachtung des „Train-Watchers“ am Bahndamm: die Flasche beschreibt eine Parabelbahn.

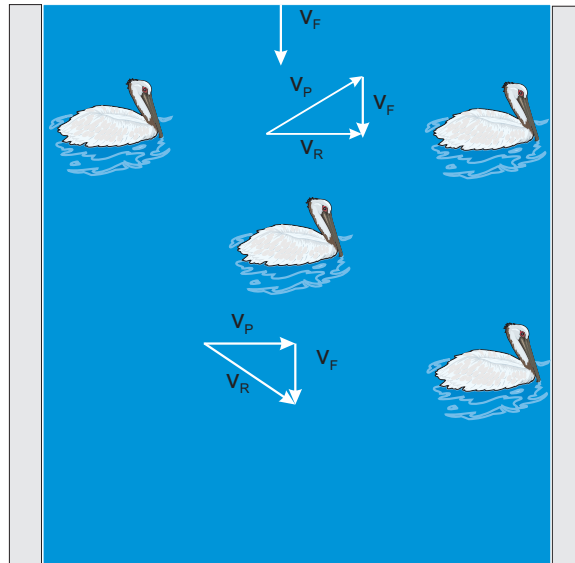
**Beispiel 3.5.** Pferdediebe wußten, daß zum Erreichen eines bestimmten Punktes am gegenüberliegenden Flußufer die Pferde, je nach Strömung, ein ganzes Stück flußaufwärts ins Wasser gejagt werden mußten. Am Unterlauf eines Flusses ist das geruhsamer. Ein Pelikan schwimmt mit einer Eigengeschwindigkeit  $v_P = 0,5$  m/sec senkrecht zur Flußströmung  $v_{\text{Wasser}} = v_0$  mit 0,3 m/sec über einen 300 m breiten Fluß (Abb. 3.2). Wäre das Wasser in Ruhe, hätte er nach 600 sec = 10 min das gegenüberliegende Ufer erreicht. So wird er abgetrieben, und zwar um  $s = 600\text{sec} \times 0,3\text{m/sec} = 180$  m. Er hat damit eine Strecke von 350 m zurückgelegt und ist, vom Flußufer gemessen, mit einer Geschwindigkeit von 0,58 m/sec geschwommen:  $v = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2} = 0,58$  m/sec.

Soll er am genau gegenüberliegenden Uferpunkt ankommen, weil dort ein Urlauber wartet, um ihn zu knipsen, müßte er seine Eigengeschwindigkeit gegen die Strömung richten. Seine Geschwindigkeit ist jetzt nur noch  $v = \sqrt{0,5^2 - 0,3^2} = 0,4$  m/sec, und seine Überquerung würde ihn nicht 10 min, sondern  $12\frac{1}{2}$  min kosten. Daher wird man einen zweiten Touristen benötigen, der so dumm ist, in Schwärmen von Moskitos ein derartiges Experiment durchzuführen.

$$\mathbf{v}_{\text{gesamt}} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}. \quad (3.3)$$

Beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen müssen folglich die Geschwindigkeiten vektoriell addiert werden.

<sup>3</sup>Die bei physikalischen Versuchen benutzten irdischen Inertialsysteme sind nur in gewisser Näherung als solche anzusehen, da sich die Erde um ihre eigene Achse (Rotation) und um die Sonne (Revolution) dreht, denn diese Bewegungen erfolgen in verschiedenen Punkten nicht mit derselben konstanten Geschwindigkeit. Der Fehler ist zwar sehr gering, aber dennoch nachweisbar (FOUCAULTSches Pendel).



**Abb. 3.2.** Schwimmen zum gegenüberliegenden Ufer. „Der Weg zur Quelle führt gegen den Strom“ (K.H. BIEDENKOPF).

### 3.3 Impuls I (Impulserhaltung)

In einem Inertialsystem ändert sich die Geschwindigkeit eines sich frei bewegenden, nicht mit anderen Körpern in Wechselwirkung stehenden Teilchens nicht, jedoch die eines mit anderen wechselwirkenden Teilchens. Diese Änderungen sind voneinander abhängig, und um diese Änderungen quantifizieren zu können, definieren wir ein abgeschlossenes System:

**Satz 3.2** *Abgeschlossenes System:* Für eine Gesamtheit miteinander wechselwirkender Teilchen, die nicht mit der äußeren Umgebung in Beziehung stehen, existiert eine Reihe von geschwindigkeitsabhängigen Größen, die sich im Laufe der Zeit nicht ändern, sog. *Erhaltungsgrößen*.

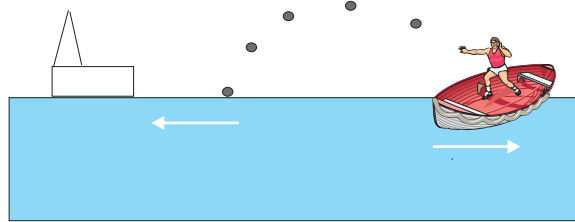
Eine dieser Systemgrößen ist der Gesamtimpuls, die Vektorsumme der Impulse aller Teilchen unseres Systems, und wir definieren den Impuls eines einzelnen Teilchens zu

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (3.4)$$

mit  $\mathbf{v}$  der Teilchengeschwindigkeit, womit wird:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{const} : \quad (3.5)$$

der Gesamtimpuls des Systems ist zeitlich konstant und verteilt sich wegen der gegenseitigen Kraftwirkungen auf die einzelnen Teilchen des Systems.



**Abb. 3.3.** In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls konstant.

### 3.3.1 Rückstoß

Für ein ruhendes System gilt  $\mathbf{p} = 0$ , nach Gl. (3.5) aber auch

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2. \quad (3.6)$$

Dies ist die Grundlage des Rückstoßprinzips, und wir ersehen am folgenden Beispiel besonders die existentielle Notwendigkeit der Beschreibung des Impulses als vektorielle Größe:

**Beispiel 3.6.** Besteigen wir ein ruhendes Boot ohne Ruder, aber mit Steinen (Abb. 3.3). Werfen wir einen Stein aus dem Boot, werden wir eine Bewegung des Bootes in genau die entgegengesetzte Richtung nach Gl. (3.6) feststellen.

Wir haben es nun zum ersten Mal mit mehreren Teilchen zu tun gehabt, deren Wechselwirkung aufeinander wir untersucht haben. Obwohl sich Teilchen „aus dem Nichts“ heraus bewegten, soll dennoch der Gesamtimpuls konstant bleiben? Nun kann man die Ausrede verwenden, daß der ins Wasser geworfene Stein dort stark abgebremst wird, daß man das alles schön beobachten, aber schlecht messen kann, daher machen wir folgenden weiteren Versuch:

**Beispiel 3.7. Auseinanderdriften mit Folgen.** Zwei durch ein Seil und eine zusammengedrückte Feder zusammengebundene Eisenbahnwaggons werden nach Durchbrennen des Seils sich beschleunigt voneinander entfernen, und zwar auf reibungsarmen Schienen. Dann ist nach Gl. (3.6)

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \vee m_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2 : \quad (3.7.1)$$

die Impulse sind einander entgegengerichtet, aber weiter:

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{v_2}{v_1} : \quad (3.7.2)$$

ihre Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen. Hat der eine Waggon die doppelte Masse des anderen, fährt er dafür nur mit der halben Geschwindigkeit davon.

**Beispiel 3.8. Auseinanderdriften auf der Wippe.** Zwei durch ein Seil und eine zusammengedrückte Feder zusammengebundene Eisenbahnwaggons ( $m_1 = 2m_2$ ) befinden sich so

auf einer Wippe, daß sie sich nicht bewegt (man sagt: „es herrscht Gleichgewicht.“). Die beiden Waggons werden sich nach Durchbrennen des Seils beschleunigt voneinander entfernen, aber dabei bewegt sich das am Auflagepunkt  $S$  gelagerte Brett nicht!

Dieser Punkt  $S$ , der in Ruhe bleibt, wird *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* genannt.

### 3.4 Aktion

Die Beobachtung der Bewegungsänderung einer Masse durch eine Kraft ergibt, daß die Kraft sowohl proportional der Masse als auch der Beschleunigung ist, die die Masse erfährt. Setzt man die Konstante gleich Eins, können wir diese DGL anschreiben:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \mathbf{p}. \quad (3.8)$$

**Satz 3.3** 2. NEWTONsches Axiom: Die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegten Kraft proportional und geschieht in der Richtung, in der jene Kraft angreift.

Die in der Gl. (3.8) erscheinende Masse  $m$  ist die *träge Masse*; gemessen wird jedoch ihre Eigenschaft *schwere Masse* im Zustand der Ruhe.

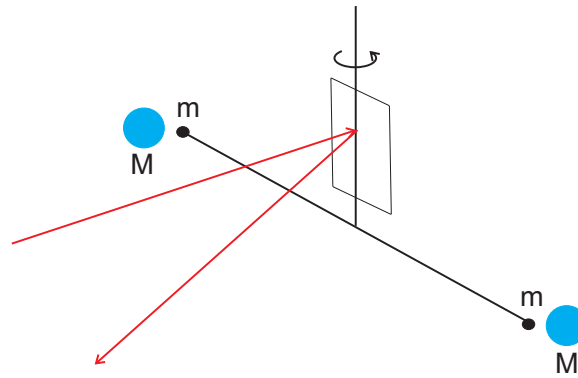
Wenn keine Kraft auf den Körper wirkt, erfährt er nach Gl. (3.8) keine Beschleunigung, denn ein Produkt ist Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist. Die Masse eines Körpers jedoch ist *immer* endlich, also verschieden von Null. Der Körper ist also entweder in Ruhe oder gleichförmig bewegt, was die Aussage des 1. NEWTONschen Axioms ist.

Umgekehrt folgt daraus aber auch: Eine Kraft (**Ursache**) muß von etwas auf etwas, z. B. einen Gegenstand, einwirken, um eine **Wirkung** zu erzeugen, hier: dieses etwas in Bewegung zu versetzen. Für uns ist selbstevident, daß ein Gegenstand nicht bewegt werden kann ohne Ursache, die wir als **Kraft** bezeichnen. Wenn aber kein Gegenstand da ist, kann auch nichts bewegt werden. Vakuum kann weder angezogen noch abgestoßen werden.

Damit erweist sich Gl.(3.8) als Spezialfall des 2. NEWTONschen Axioms. Philosophisch gesehen, befreite sich NEWTON damit von der fast zweitausend Jahre akzeptierten Annahme des ARISTOTELES, es sei die natürliche Tendenz der Körper, zur Ruhe zu kommen.

### 3.5 Gravitationskraft

- Eine Masse, die in die Nähe einer anderen gebracht wird, erfährt eine Kraft, weil sich Massen anziehen (Abb. 3. 4).
- Eine Masse, die beschleunigt wird, erfährt eine Kraft wegen ihrer Trägheit.



**Abb. 3.4.** Prinzip der Gravitationswaage von CAVENDISH (1798). Zwei kleine Kugelchen aus Blei der Masse  $m$ , an einem dünnen Faden sehr leicht beweglich an einem Waagebalken befestigt, erfahren bei Annäherung von großen Massen  $M$  eine Ablenkung, die z. B. durch einen abgelenkten Lichtstrahl deutlich gemacht werden kann.

Was hat das eine mit dem anderen zu tun? Ist es möglich, daß zwei Körper, die gleich stark von einer anderen Masse angezogen werden, sich in unterschiedlicher Weise der Beschleunigung widersetzen ( $\gamma$ : Gravitationskonstante ( $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ,  $M$ : Erdmasse,  $r$ : Erdradius,  $m_s$ : Probemasse)?

$$\text{Massenanziehung : } F = \gamma \frac{Mm_s}{r^2}. \quad (3.9)$$

Gleichsetzen mit NEWTONScher Bewegungsgleichung:

$$\gamma \frac{Mm_s}{r^2} = m_t a. \quad (3.10)$$

$$a = \frac{m_s}{m_t} \gamma \frac{M}{r^2}. \quad (3.11)$$

Wäre  $\frac{m_s}{m_t}$  materialabhängig, fielen diese Körper unterschiedlich schnell!

### 3.6 Zerlegung von Kräften

Wie wir bei der Zerlegung von Geschwindigkeiten beim waagerechten und schiefen Wurf gesehen haben, überlagern sich vektorielle Größen ungestört und können daher nach den Gesetzen der Vektoralgebra zerlegt werden.

**Beispiel 3.9.** Zwischen zwei Häuserwänden (Abstand  $a$ ) werde in gleicher Höhe ein Kabel der Länge  $l$  gespannt und in der Mitte mit dem Gewicht  $\mathbf{G}$  belastet. Dadurch hänge das Kabel um  $y$  durch.

- Wie groß ist die längs des Drahtes wirkende Kraft?

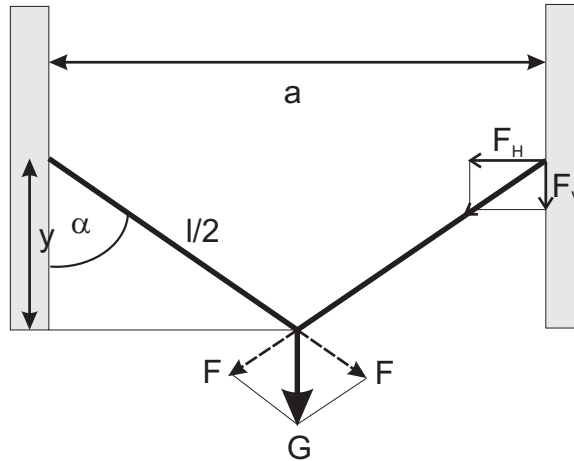


Abb. 3.5. Zerlegung einer Kraft in 2 Komponenten.

- Wie groß sind die horizontale und vertikale Kraftkomponente in einem der beiden Befestigungspunkte?
1. Zerlegung von  $G$  in zwei Komponenten längs der Drahthälften (Abb. (3.5):

$$\frac{F}{G/2} = \frac{l/2}{y} \wedge y = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - a^2}, \quad (3.12)$$

woraus sich für  $F$

$$F = \frac{1}{2}G \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}}} \quad (3.13)$$

ergibt. Grenzwerte:

- $l \gg a$ :  $F = \frac{1}{2}G$ ,
  - $l \rightarrow a$ :  $F \rightarrow \infty$ .
2. Damit können wir die Kraftkomponenten  $F_V$  und  $F_H$  im Befestigungspunkt bestimmen: Das Kabel hängt um den Winkel  $\alpha$  durch, damit werden

- $\cos \alpha = \frac{y}{l/2} = \frac{1/2G}{F}$  und
- $\sin \alpha = \frac{a/2}{l/2}$ .

Da die Zerlegung unseres Kräfteparallelogramms an der Wand Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen erzeugt, ist auch

- $\cos \alpha = \frac{F_V}{F} = \frac{y}{l/2}$
- $\sin \alpha = \frac{F_H}{F} = \frac{a/2}{l/2}$ .

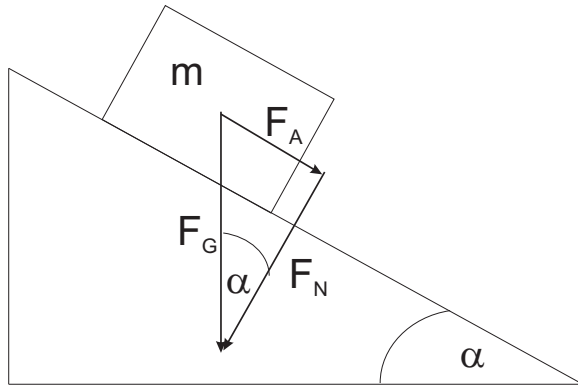


Abb. 3.6. Ein Körper auf der schiefen Bahn.

Gleichsetzen ergibt

- $F_V = 1/2 G$ ,
- $F_H = 1/2 G \frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 1}}$ .
- Für den Fall  $y = a/2$  ( $45^\circ$ ) wird
- $F_H = 1/2 G \frac{1}{\sqrt{\frac{2a^2}{a^2} - 1}} = 1/2 G$ .

Wie aus Abb. 3.5 ersichtlich, ist die gesamte Gewichtskraft dann vektoriell zu addieren. Gleichgültig, wie hoch der Anteil von  $F_H$  ist, der Vektor an der linken und an der rechten Wand ergeben als Vektorsumme immer Null.

**Beispiel 3.10.** Ein Körper befindet sich auf einer schiefen Ebene (Steigungswinkel  $\alpha$ ), die ihn am Fallen parallel zur Gravitationskraft hindert. Mit welcher Kraft wird der Körper beschleunigt (Abb. 3.6)?

$$F_{\parallel} = mg, F_{\text{Schiefe Ebene}} = F \sin \alpha. \quad (3.14)$$

Damit wird die Beschleunigung, der sog. *Hangabtrieb*, selbst

$$a_H = g \sin \alpha : \quad (3.15)$$

bei  $\alpha = 0^\circ$  ist  $\sin \alpha = 0$ , und der Körper bleibt auf jeden Fall in Ruhe.

### 3.7 Reibungskraft

Wir setzen unsere Überlegungen zu den ersten beiden NEWTONSchen Axiomen nun fort und finden aus den Betrachtungen auf der Schiefen Ebene, daß die berechneten Werte für die Beschleunigung größer sind als die gemessenen. Dies liegt an den Reibungskräften, die in der idealisierten NEWTONSchen keine Berücksichtigung fanden. In der Tat sind die Bahnkurven eines Pucks auf dem Eis länger als die einer Kugel im

Sand, sind die Bremswege auf nassen oder vereisten Straßen länger als auf trockenen. Wir betrachten zunächst induktiv einzelne Phänomene der Reibung, um dann das 3. NEWTONsche Axiom aufzustellen.

Trotz einer wirkenden Kraft auf der schiefen Ebene kann der Gegenstand dennoch in Ruhe bleiben, wenn die *Haftreibungskraft* größer als die beschleunigende Kraft ist. Da der Gegenstand sich irgendwann beschleunigt in Bewegung setzt, muß die *Gleitreibung* kleiner als die *Haftreibung* sein. Wir unterscheiden zwischen<sup>4</sup>

- COULOMB-Reibung,
- STOKES-Reibung,
- NEWTON-Reibung,
- Rollreibung.

### 3.7.1 Strömungswiderstand

Fluide Systeme bestehen aus leicht gegeneinander verschiebbaren Teilchen und verhalten sich chaotisch beim Umströmen eines Körpers, wodurch dieser abgebremst wird.

**Beispiel 3.11.** Auch ein Fallschirmspringer wird beim freien Fall aus dem Flugzeug nicht beliebig beschleunigt, sondern er erreicht durch Luftreibung eine Endgeschwindigkeit, in der er kräftefrei auf etwa 200 km/h fällt. Der Strömungswiderstand nimmt mit der Strömungsgeschwindigkeit zu und kompensiert irgendwann die Beschleunigung durch das Gewicht. Wann ist irgendwann (Abb. 3.7)?

$$ma = mg - bv^2. \quad (3.17.1)$$

$$\int_0^t \frac{m}{mg - bv^2} \frac{dv}{dt} dt = \int_0^t dt. \quad (3.17.2)$$

$$m \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv}{mg - bv^2} = \int_0^t dt. \quad (3.18.1)$$

$$\frac{m}{b} \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv}{\frac{mg}{b} - v^2} = \int_0^t dt. \quad (3.18.2)$$

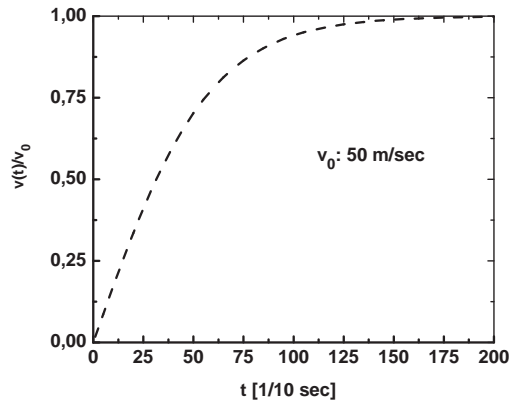
Setzt man

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg}{b}}, \quad (3.19.1)$$

erhält man das tabellierte Integral des Area Tangens hyperbolicus

---

<sup>4</sup>Die Besprechung wird wegen noch zu erarbeitender Zusammenhänge auf Kap. 4 (Reibungsarbeit) bzw. Kap. 7 (STOKESSches Gesetz) verschoben.



**Abb. 3.7.** Durch die Luftreibung erreicht der Fallschirmspringer eine Endgeschwindigkeit und damit einen kräftefreien Zustand (lks.), bevor er die Reißleine zieht und mit einer Sinkgeschwindigkeit von etwa 4 m/sec den Boden erreicht (re.).

$$\operatorname{ar\,tanh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} : \quad (3.19.2)$$

$$\frac{m}{b} \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \frac{m}{b} \left[ \frac{1}{v_0} \operatorname{ar\,tanh} \left( \frac{v}{v_0} \right) \right]_0^{v(t)} = \int_0^t dt. \quad (3.20)$$

$$\frac{m}{bv_0} \left( \operatorname{ar\,tanh} \frac{v(t)}{v_0} - \operatorname{ar\,tanh}(0) \right) = t \quad (3.21.1)$$

$$\frac{m}{bv_0} \operatorname{ar\,tanh} \frac{v(t)}{v_0} = t \quad (3.22.2)$$

$$\operatorname{ar\,tanh} \frac{v(t)}{v_0} = \frac{bv_0 t}{m} \Rightarrow \frac{v(t)}{v_0} = \tanh \frac{bv_0 t}{m} \quad (3.22.3)$$

$$v(t) = v_0 \tanh \frac{bv_0 t}{m}. \quad (3.23)$$

### 3.8 Scheinkraft

Die Kraft, die auf einen Körper ausgeübt wird, hat ihren Ursprung im Vorhandensein von einem oder mehreren anderen Körpern. In einem abgeschlossenen System ist der aus den Impulsen der einzelnen Körpern bestehende Gesamtimpuls konstant, und seine zeitliche Ableitung Null:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \dots = 0 \quad (3.24)$$

oder

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = 0, \quad (3.25.1)$$

allgemeiner:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 : \quad (3.25.2)$$

In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Kräfte, die auf alle Teilchen wirkt, Null.

### 3.8.1 Freier Fall

Schreibt man Gl. (3.8) so

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0, \quad (3.26)$$

ist folgende Auslegung möglich:

Man faßt den Minuenden als gesonderte Trägheitskraft auf, die der äußeren Kraft  $\mathbf{F}$  das Gleichgewicht hält. Damit wird das Bewegungsproblem auf ein Gleichgewichtsproblem reduziert. Da die Trägheitskraft nur am beschleunigten Körper vorhanden ist, kann sie nicht an seiner Beschleunigung mitwirken. Aus diesem Grund bezeichnet man sie auch als Scheinkraft oder fiktive Kraft.<sup>5</sup>

**Beispiel 3.12.** Beim Freien Fall ist die Trägheitskraft  $-mg$ . Die Summe aus Gewicht und Trägheitskraft ergibt Null. Beim Fallen hebt die Trägheitskraft die Schwerkraft auf. Ist jedoch die Beschleunigung der Schwerkraft entgegengerichtet, so addiert sich die Trägheitskraft zur Schwerkraft.

## 3.9 Arten der Kräfte

Wir haben jetzt einige verschiedene Arten von Kräften kennengelernt und ziehen ein erstes Resümee. Es gibt Kräfte,

- die auf dem direkten Kontakt zwischen Körpern beruhen, z. B. mechanischer Druck, Stoß, Zug ... : *Nahwirkungskräfte*,
- bei denen keine direkte Wechselwirkung, insbesondere kein Kontakt, nachweisbar ist, z. B. Gravitationskraft, elektromagnetische Kräfte, Zentrifugalkraft ... Diese werden wieder in zwei Untergruppen eingeteilt:
  - Kräfte, die in einem System dadurch entstehen, daß man den Vorgang in einem System (Nicht-Inertialsystem) beschreibt, die in einem anderen nicht vorhanden wären, z. B. Trägheitskräfte, und

---

<sup>5</sup>Detailliert werden wir diese Scheinkräfte bei der Rotationsbewegung besprechen, für die die Kenntnis des äußeren Vektorproduktes erforderlich ist.

- Kräfte, die durch keine Veränderung des Bezugssystems aufhebbar sind (echte Fernkräfte: Gravitation, elektrostatische und elektromagnetische Wechselwirkung).

### 3.10 Actio = Reactio

Sehen wir uns den Vorgang der Kraftübertragung nun genauer an! Die Kraft  $F$  greift von einem Körper an einem anderen Körper der Masse  $m$  und setzt ihn gegen sich in Bewegung. Die Frage ist nun: Wer wird gegen was wirklich in Bewegung gesetzt? Handelt es sich um lebendige Wesen, scheint die Antwort klar: das Pferd zieht die Kutsche, nicht die Kutsche das Pferd. Eine Billardkugel, die gegen die Bande gespielt wird, übt auf diese eine Kraft aus. Dann bewegt sie sich aber unter Änderung der Geschwindigkeit, also beschleunigt, von dieser fort. Folglich erfährt sie von dieser Bande eine Krafteinwirkung. Es stellt sich heraus, daß bei dieser Wechselwirkung die aufeinander wirkenden Kräfte entgegengesetzt gleich sind, und NEWTON faßte das in sein

**Satz 3.4** 3. NEWTONSches Axiom (*Actio = Reactio*): Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind gleich, aber entgegengesetzt gerichtet.

In dieser Kurzform steckt in dem Wort *aufeinander* die Feststellung, daß die Kräfte jeweils auf ihr vis-à-vis wirken. Ein Kraft, die ein äquivalentes Pendant besitzt und am gleichen Gegenstand angreift, verursacht selbstverständlich keine Änderung des Bewegungszustandes. Tatsächlich muß das Gesamtsystem betrachtet werden. Eine Kanone übt eine Kraft auf eine Kugel aus und setzt diese damit beschleunigt in Bewegung, sie selbst erfährt eine beschleunigte Bewegung in die entgegengesetzte Richtung. Dies ist sichtbar am Rückschlag, den das Kanonenrohr erfährt. Noch besser zum Nachweis der Gegenkraft wäre es allerdings, wenn die Kanone auf glattem Eis stünde.

#### 3.10.1 Fortbewegung

**3.10.1.1 zu Lande.** Besonders fühlbar wird die Existenz der Gegenkraft *reactio* bei der schnellen Fortbewegung, auch Laufen genannt, bei der mit den Beinen eine große Kraft nach hinten auf den Boden ausgeübt wird. Die *Reactio* des Bodens beschleunigt den Sportler. Er selbst setzt damit die Erde in Bewegung, wenn auch nicht meßbar. Bei Glatteis fehlt diese *Reactio*.

**3.10.1.2 auf dem Wasser.** Wir sahen, daß eine Vorwärtsbewegung eines Bootes durch Hinauswerfen von Steinen ermöglicht wird (Konstanz des Impulses im abgeschlossenen System). Andererseits ist es die *Reactio* der beschleunigten Steine, die das Boot in die Gegenrichtung treibt. Da man meist nicht über einen Vorrat an Steinen verfügt, verwendet man meist ersatzweise das Wasser, von dem in einem See oder im



**Abb. 3.8.** Zur Berechnung des Antriebs einer einstufigen Rakete, die im Weltall nochmals zündet.

Meer genügend vorhanden ist, und beschleunigt dieses nach hinten — mit Rudern, Paddeln, Schiffsschrauben, Rädern ... Deren *Reactio* treibt das Boot voran.

**3.10.1.3 in der Luft.** Diese Aufgabe wird in der Luft von Propellern geleistet. Bei Düsentriebwerken wird Kerosin verbrannt und die Verbrennungsgase mit hoher Geschwindigkeit ausgestoßen. Deren *Reactio* treibt das Flugzeug voran, das daher nie schneller werden kann als die Austrittsgeschwindigkeit der Auspuffgase.

### 3.10.2 Rückstoß und Raketengleichung

Wir haben bereits am Impulserhaltungssatz den Rückstoß studiert und wollen dies im fortgeschrittenen Stadium nochmals quantitativ am Beispiel der Rakete tun (*actio = reactio*).

**Beispiel 3.13.** Eine Rakete der Anfangsmasse  $m$ , die im Weltall mit der Geschwindigkeit  $v$  fliege, stoße in der Zeit  $dt$  Abgase  $dm$  mit der Geschwindigkeit  $v_0$  aus, womit sich die Masse der Rakete auf  $m - dm$  verringere und sich ihre Geschwindigkeit auf  $v + dv$  erhöhe (Abb. 3.9).

Da der Gesamtimpuls konstant ist, müssen insbesondere die Impulse zur Zeit  $t = 0$  und  $t = dt$  gleich sein. Die Masse der Rakete nimmt um  $dm$  ab, die der Auspuffgase um  $dm$  zu. Der Impuls der Auspuffgase (Geschwindigkeit  $v_0$ ) ist dem der Rakete entgegengerichtet, damit addieren sich die Geschwindigkeiten von Rakete und Auspuffgas:  $v + v_0$ :

$$mv = (m - dm)(v + dv) + dm(v + v_0). \quad (3.27)$$

Ausmultiplizieren ergibt bei Vernachlässigung des Glieds 2. Ordnung

$$mdv + v_0 dm = 0 \Rightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{dv}{v_0} \Rightarrow -d \ln m = \frac{dv}{v_0} \Rightarrow -\int_{m_0}^m d \ln m = \int_0^v \frac{dv}{v_0}, \quad (3.28)$$

was integriert ergibt:

$$\ln m + \frac{v}{v_0} = \text{const.} \quad (3.29)$$

Die Größe der Konstanten ergibt sich aus der Anfangsbedingung für den Beginn des  $v = 0$  zu  $\ln m_0$ :

$$\text{const} = \ln m_0 \Rightarrow \ln m + \frac{v}{v_0} = \ln m_0 \quad (3.30.1)$$

$$\frac{v}{v_0} = \ln m_0 - \ln m \Rightarrow m = m_0 e^{-v/v_0} \wedge v = v_0 \ln \frac{m_0}{m} : \quad (3.30.2)$$

Der Raketenrest  $m = m_0 e^{-v/v_0}$  fliegt mit erhöhter Geschwindigkeit  $v = v_0 \ln \frac{m_0}{m}$  davon. Die maximal erreichbare Geschwindigkeit liegt also mit dem Verhältnis von Anfangsmasse zu restlicher Nutzmasse und der Ausstoßgeschwindigkeit der Abgase fest.  $m_0/m$  ist maximal 6, damit ergibt sich für eine Einstufen-Rakete  $v \approx 2v_0$ .

Wie groß ist  $v_0$ ? Alles, was in der Brennkammer ist, verwandelt sich in schnelles Abgas. Nun bestimmt das Verhältnis von Treibstoff- zu Gesamtmasse (= Treibstoffmasse + Nutzmasse), damit Impuls- und Energiesatz die Geschwindigkeit. Die spezifische, d. h. auf die Masse bezogene, Explosionsenergie ist für moderne Treibstoffe etwa  $9 \times 10^3$  kJ/kg:

$$v = \sqrt{\frac{m_{\text{Treibstoff}}}{m_{\text{Treibstoff}} + m_{\text{Nutzlast}}} \times 9 \times 10^3 \text{ m/sec}}, \quad (3.31)$$

also wird  $v_{\text{max,Gas}} = v_0$  etwa 3 km/sec, damit für die maximale Geschwindigkeit einer Einstufenrakete:  $v_{\text{max,Rakete}} \approx 6$  km/sec.

### 3.11 Aufgaben und Lösungen

**Aufgabe 3.1** Eine Uhr (100 g) fällt aus 1,5 m Höhe zu Boden und kommt innerhalb 1 mm zum Stillstand. Bestimmen Sie

- die Aufprallgeschwindigkeit,
- die Fallzeit,
- die Bremsbeschleunigung,
- die auf die Uhr wirkende Kraft.

Was ist, wenn der Bremsweg auf einem Kissen auf 5 cm verlängert wird?

**Lösung.**

$$v = gt \wedge s = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{3 \text{ m}}{10 \text{ m/sec}}} \Rightarrow t = 0,55 \text{ sec.}$$

$$v = 10 \cdot 0,55 \text{ m/sec} = 5,5 \text{ m/sec.}$$

$$s = 1 \text{ mm} \Rightarrow -a = \frac{1}{2} \frac{v^2}{s}$$

$$5,5^2/(2 \cdot 10^{-3}) \text{ m}^2\text{sec}^{-2}/\text{m} = 1500 \text{ g}$$

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{5,5}{15,1} \cdot 10^{-3} \text{ sec} = 0,36 \text{ msec}$$

$$F = ma = 15,1 \cdot 0,1 \cdot 10^3 \text{ N} = 1510 \text{ N.}$$

$$s = 5 \text{ cm} : a = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{s} = -\frac{5,5^2}{10 \cdot 10^{-2}} \text{ m/sec} = 303 \text{ m/sec}^2 = 30 \text{ g}$$

**Aufgabe 3.2** Schlankheitskur (privat) und Trimmen (Bundeswehr):

1. Sprinten auf der Treppe vom Erdgeschoß zum 5. Stock (20 m, 75 kg) in 20 sec.
2. Schützengraben ausheben (5m lang, 1 m breit, 1,50 tief,  $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ ).

**Lösung.**

$$W = 75 \cdot 9,81 \cdot 20 \text{ kg m/sec}^2\text{m} = 14,725 \text{ kJ.} \quad (1)$$

$$P = 14,715/20 \text{ kJ/sec} = 736 \text{ W} = 0,99 \text{ PS.} \quad (2)$$

$$m = \rho V = 2,5 \cdot 18,75 \cdot 10^3 \text{ kg.} \quad (3)$$

$$W = Fds. \quad (4)$$

$$W = 0,75 \cdot 18,75 \cdot 9,81 \cdot 10^3 = 138 \cdot 10^3 \text{ Nm} = \text{J} = 138 \text{ kJ} = 33 \text{ kcal.} \quad (5)$$

Hierbei wird angenommen, daß die Erde im Mittel aus 75 cm entnommen wird und gleichmäßig auf N.N. (Normal Null) verteilt werden kann. Anderer Vorschlag: Erdblock wird im Gedankenexperiment komplett gehoben und zur Seite gestellt. Dann wird die doppelte Arbeit verrichtet.

**Aufgabe 3.3** Ein Hammer einer Masse von 500 g fällt im Freien Fall aus 81,5 cm Höhe auf ein Stemmeisen mit der Masse 300 g. Bei dem vollkommen unelastischen Stoß wird dieses 6,7 mm in einen sehr schweren Holzblock getrieben.

- Wie hoch ist die kinetische Energie des Hammers?

- Wie hoch ist die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  des Stemmeisens?
- In welcher Zeit wird das Stemmeisen von  $v_0$  auf Null abgebremst?
- Wie stark ist folglich die mittlere Bremsverzögerung im Holz?

**Lösung.**

$$E_{\text{pot}} = mgh = 4 \text{ J} = E_{\text{kin}} \Rightarrow v = 4 \text{ m/sec.} \quad (1)$$

$$v = gt \wedge s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v = \sqrt{2sg} \Rightarrow v = 4 \text{ m/sec.} \quad (2)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_{\text{kin}} = 4 \text{ J.} \quad (3)$$

$$p = 2 \text{ kg m/sec} \Rightarrow v_0 = 2,5 \text{ m/sec.} \quad (4)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \wedge s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \frac{\Delta v}{\Delta t} t^2. \quad (5)$$

Für die mittlere Abbremsung ist  $\Delta t = t$ :

$$s = \frac{1}{2} \frac{\Delta v}{t} t^2 = \frac{1}{2} \Delta v \cdot t \Rightarrow t = \frac{2s}{\Delta v} = \frac{13,4 \cdot 10^{-3}}{2,5} = 5,36 \text{ msec.} \quad (6)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2,5}{5,36} \cdot 10^3 \text{ m/sec}^2 = 466 \text{ m/sec}^2 = 47,5 g. \quad (7)$$

$$a = \frac{s}{t^2} = 466 \text{ m/sec}^2 \quad (8)$$

bzw. einfacher

$$a = \frac{v^2}{2s} = 466 \text{ m/sec}^2. \quad (9)$$

**Aufgabe 3.4** Bestimmen Sie die Endgeschwindigkeit von Kugeln, die sich mit der Geschwindigkeit  $v$  durch ein fluides Medium (Flüssigkeit, Gas) mit der (dynamischen) Zähigkeit  $\eta$  bewegen, wobei die dadurch entstehende Reibungskraft  $F_R$  durch das STOKESSche Gesetz  $F_R = 6\pi\eta rv = bv$  gegeben ist.

**Lösung:**

$$ma = mg - bv. \quad (1)$$

$$\int_0^t \frac{m}{mg - bv} \frac{dv}{dt} dt = \int_0^t dt. \quad (2)$$

$$m \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv}{mg - bv} = \int_0^t dt. \quad (3)$$

$$\frac{m}{b} \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv}{\frac{mg}{b} - v} = \int_0^t dt. \quad (4)$$

Setzt man

$$\frac{mg}{b} = a_0 - v = x \Rightarrow dx = -dv, \quad (5)$$

erhält man mit der Substitutionsregel

$$-\frac{m}{b} \int_{x(t=0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{m}{b} \ln(a_0 - v) \Big|_{v(t=0)}^{v(t)} = t. \quad (6)$$

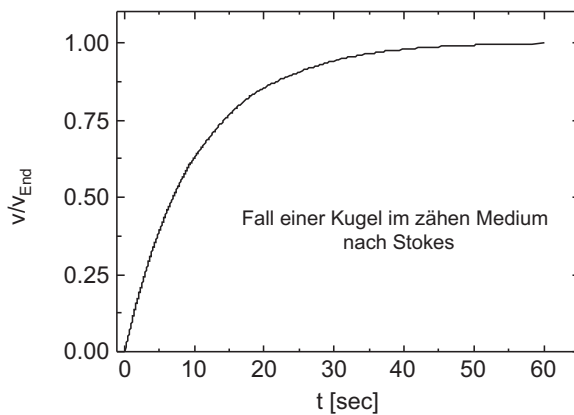
$$\ln(a_0 - v) \Big|_{v(t=0)}^{v(t)} = -\frac{b}{m} t. \quad (7)$$

Sei die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$  Null, wird die Integrationskonstante  $\ln a_0$ , und wir erhalten aus Gl. (7):

$$\ln(a_0 - v) = -\frac{b}{m} t + \ln a_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{a_0 - v}{a_0}\right) = -\frac{b}{m} t. \quad (8)$$

$$\frac{a_0 - v}{a_0} = e^{-bt/m} \Rightarrow a_0 - v = a_0 e^{-bt/m}. \quad (9)$$

$$v = a_0 [1 - e^{-bt/m}]. \quad (10)$$



**Abb. 3.9.** Zum Fall einer Kugel in einem zähen Medium, wobei die Reibungskraft nach STOKES abgenähert wird.

Im Exponenten steht der Ausdruck  $b/m$ , der mit der Gleichsetzung für die Endgeschwindigkeit

$$v_{\text{End}} = \frac{mg}{6\pi\eta r} \quad (11)$$

auch als

$$v = a_0 \left[ 1 - e^{-g/v_{\text{End}} \cdot t} \right]. \quad (12)$$

geschrieben werden kann. Integration ergibt

$$s = -v_{\text{End}} \left[ \frac{v_{\text{End}}}{g} e^{-gt/v_{\text{End}}} - t \right]. \quad (13)$$

**Aufgabe 3.5** Eine Rakete stößt in 10 sec 20 kg Verbrennungsgase mit der Geschwindigkeit 2 km/sec aus. Wie groß ist der auf den Raketenkörper ausgeübte Impuls? Wie groß ist die Beschleunigungskraft?

**Lösung.**

$$p = mv = 2 \cdot 2 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^4 \text{ kg m sec}^{-1}.$$

$$F = \Delta p / \Delta t = 4 \text{ kN} \approx 400 \text{ kp}.$$

**Aufgabe 3.6** Eine Rakete der Anfangsmasse  $m_0 = 3000 \text{ kg}$  auf der Startrampe „schwebt“ nach der Zündung wenige Sekunden, bevor der Schub voll aufgebaut ist, und sich die Rakete beschleunigt bewegt. Wenn die Auspuffgeschwindigkeit der verbrannten Gase  $v_0 = 2,8 \text{ km/sec}$  beträgt, wie hoch ist der Verlust an Raketenmasse, damit dieser Schwebestand erreicht werden kann? Wie hoch ist die Beschleunigung bei einem Massenverlust von  $25 \text{ kg/sec}$ ?

**Lösung.** Gefragt ist nach dem Gleichgewicht der Kräfte: Erdanziehung vs. Beschleunigung, wobei die Beschleunigung um die kontinuierliche Massenabnahme pro Zeiteinheit zu modifizieren ist:

$$m_0 \frac{dv}{dt} - v_0 \frac{\Delta m}{\Delta t} = -m_0 g. \quad (1)$$

Für den Schwebestand ist  $dv/dt$  gleich Null, also wird

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_0 g}{v_0} = 10,5 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}. \quad (2)$$

Ist die Massenabnahme höher, kann also eine beschleunigte Bewegung erwartet werden:

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{v_0}{m_0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = 13,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}. \quad (3)$$

Das sind ungefähr  $1,4 g$ .

**Aufgabe 3.7** Prinzip der Stufenrakete: 1 Kugel teilt sich durch explodierende „Zellteilung“ insgesamt viermal in jeweils gleich schwere Reststücke, wobei die Geschwindigkeit der Explosionsgase 2 km/sec beträgt. Wie hoch ist die Nutzlast und deren Endgeschwindigkeit?

**Lösung.** Bei „Zellteilung“ kann jeweils die Hälfte in Vorwärtsrichtung genutzt werden, also ist die Endgeschwindigkeit 4 km/sec. Die Masse hat sich dabei aber um den Faktor  $2^{-4} = 1/16$  verringert.

**Aufgabe 3.8** Warum ist der in Kfz-Prospekten genannte Verbrauchswert für den Stadtzyklus (50 km/h) so viel höher als der Wert für die Richtgeschwindigkeit auf der Autobahn? Gehen Sie von einem Wirkungsgrad für den Benzinmotor von 30 % aus, von einem „braven“ Autofahrer, der incl. seiner Selbst 1250 kg bewegen und damit auch beschleunigen muß bei insgesamt 300 Stopps wg. roter Ampeln und sonstiger Hindernisse für ein zügiges Vorankommen. Mit 10 l Benzin haben Sie einen sog. „Brennwert“ von  $3 \cdot 10^8$  J.

**Lösung.**

$$v = 50 \text{ km/h} = 14 \text{ m/sec} \Rightarrow E_{\text{kin}} = 122,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot 300 = 3,7 \cdot 10^7 \text{ J} : \quad (1)$$

$$\frac{0,37 \cdot 3,33}{3} \cdot 10 = 4,1. \quad (2)$$

das bedeutet einen Zusatzverbrauch von 4,1 l. Schlecht geschaltete Ampeln führen mithin zu wesentlich höherem Benzinverbrauch als Fahren von jenseits 200 auf der nächtlichen Autobahn.

**Aufgabe 3.9** Zweistufen-Rakete: Die beiden Stücke, die auseinandergesprenzt werden (leergebrannte untere Stufe, volle obere (Rest-)Rakete), sollen im Verhältnis 1:1 zueinander sein. Austrittsgeschwindigkeit der Gase und aktuelle Geschwindigkeit: 2 km/sec. Abtrenngeschwindigkeit der Stufen mit doppelter Schallgeschwindigkeit:  $v_s = 330 \text{ m/sec} = 1200 \text{ km/h}$ .

**Lösung.** 1 Trennung von der unteren Stufe: ganze Rakete mit  $v_1 = 2 \text{ km/sec}$ . Dazu kommt die Hälfte der doppelten Schallgeschwindigkeit für die leergebrannte Stufe und die Nutzlast:

$$v_2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 330 \text{ m/sec} = 330 \text{ m/sec} \Rightarrow v = v_1 + v_2 = 2330 \text{ m/sec}. \quad (1)$$

**Aufgabe 3.10** Auf welche Geschwindigkeit könnte man die Erde durch den im Erdinnern ( $T = 4000 \text{ K}$ , macht dann  $2400 \text{ m/sec}$ ) aufgeheizten Wasserdampf der Ozeane aus ihrer Bahn beschleunigen? Bei gleichmäßiger Verteilung des Wassers über der Erde ( $r = 6380 \text{ km}$ ) wäre die Meerdicke etwa  $4 \text{ km}$ . Erdmasse:  $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

**Lösung.** Wasservolumen:

$$V_1 - V_2 = \frac{4\pi}{3} (6,384^3 \cdot 10^9 - 6,380^3 \cdot 10^9) \text{ km}^3$$

$$V_1 - V_2 = 2,05 \cdot 10^9 \text{ km}^3 = 2,05 \cdot 10^9 \cdot 10^{12} \text{ kg}.$$

Raketengleichung:

$$\Delta v = 2,4 \cdot \frac{1}{3000} \approx 0,72 \text{ m/sec}.$$

Vergleicht man mit der Bahngeschwindigkeit der Erde ( $30 \text{ km/sec}$ ), kann man sich viel Geld sparen.

**Aufgabe 3.11** Die Federkonstante einer Feder sei  $D = 250 \text{ N/m}$ . Wenn wir eine Masse von  $2 \text{ kg}$  daran hängen, um wieviel  $\text{cm}$  wird die Feder gedehnt

- im Ruhezustand,
- bei der Beschleunigung im Fahrstuhl nach unten um  $5 \text{ m/s}^2$ ,
- bei der Beschleunigung im Fahrstuhl nach oben um  $5 \text{ m/s}^2$ ?

**Lösung.**

$$F = m(g \pm a) = -Dx \Rightarrow |x| = \frac{m(g \pm a)}{D}. \quad (1)$$

- $8 \text{ cm}$ ;
- $4 \text{ cm}$ ;
- $12 \text{ cm}$ .

**Aufgabe 3.12** Bestimmen Sie das Gewicht eines Mannes, der auf der Erde  $m_1 = 90 \text{ kg}$  „auf die Waage“ bringt, auf dem Mond (Mondmasse:  $1/81$  der Erdmasse, Mondradius:  $1740 \text{ km}$ , Erdradius  $r_1$ :  $6370 \text{ km}$ )!

**Lösung.**

$$F_{\text{grav,Erde}} = m_1 \cdot g = \gamma \frac{m_1 \cdot m_{\text{Erde}}}{r_1^2}. \quad (1)$$

$$F_{\text{grav,Mond}} = m_1 \cdot a_{\text{Mond}} = \gamma \frac{m_1 \cdot 1/81 \cdot m_{\text{Erde}}}{0,27 \cdot r_1^2}. \quad (2)$$

$$\frac{a_{\text{Mond}}}{g} = \frac{1/81}{0,27^2} = 0,16 \cdot 90 = 15,25 \text{ kp}. \quad (3)$$

**Aufgabe 3.13** Jemand, der auf der Erde 1,50 m hoch springt, wird auf dem Mond das Sechsfache schaffen. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er auf der Erde, mit welcher auf dem Mond am Boden an?

**Lösung.**

$$v^2 = 2s \cdot a = 5,43 \text{ m/sec} : \quad (1)$$

das Produkt ist konstant. Zwar springt man sechsmal so hoch, wird aber nur mit einem Sechstel der Erdbeschleunigung angezogen, d. h. man fällt aus 9 m Höhe und braucht dafür 2,37 sec.

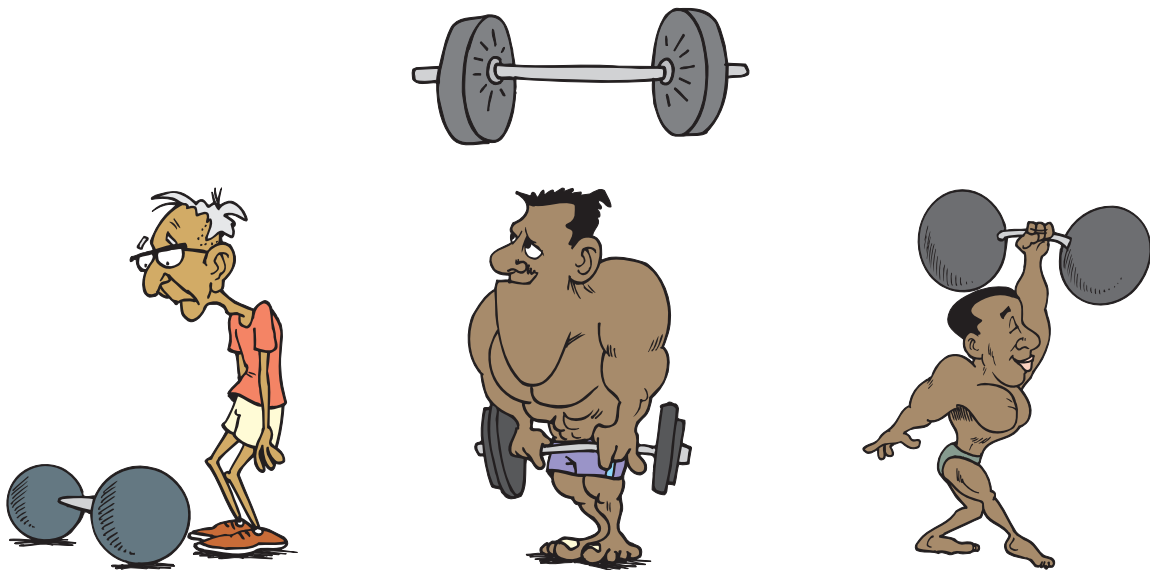
# 4 Grundbegriffe der Physik

## 4.1 Arbeit

Wir führen die Arbeit phänomenologisch an verschiedenen Beispielen ein und werden bei der Besprechung des Energiesatzes eine erste Kritik anbringen.

### 4.1.1 Hubarbeit

**Beispiel 4.1. Gewichtheben.** Um ein Gewicht  $G$  senkrecht gegen die Schwerkraft zu heben, verrichtet man die Arbeit (Abb. 4.1)



**Abb. 4.1.** Das Gewicht  $G$  wird mehr oder weniger erfolgreich gegen die Schwerkraft gehoben.

$$W = \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} = F \cdot s \cdot \cos \varphi = m \cdot g \cdot s \cdot \cos \varphi \quad (4.1)$$

und bezeichnet  $W$  als die am Gewicht  $G$  geleistete Arbeit mit der Einheit

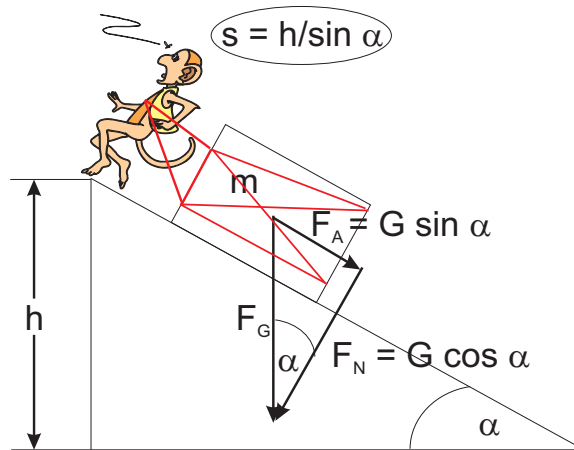
$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = \text{kg m}^2 \text{ sec}^{-2}. \quad (4.2)$$

Da Kraft und Weg den Winkel von  $0^\circ$  einschließen, ist der Cosinus Eins.

**Beispiel 4.2. Schiefe Ebene.** Auf der schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel  $\varphi$  benötigt man zwar nur die kleinere Kraft  $F_s = F \sin \varphi$ , dafür ist der Weg länger, und zwar  $s = h / \sin \varphi$  (Abb. 4.2).

Damit wird die Arbeit

$$W = F_s \cdot s = mg \sin \varphi \cdot \frac{h}{\sin \varphi} = m \cdot g \cdot h: \quad (4.2)$$



**Abb. 4.2.** Hubarbeit an der schiefen Ebene. Der Weg gegen die Schwerkraft verlängert sich von  $h$  auf  $h / \sin \alpha$ , dafür wird die Kraft um den Faktor  $\sin \alpha$  kleiner. Leider hat unser Sklave keine Rollen unter dem Stein. Daher fällt zusätzlich Reibungsarbeit an. Wir unterscheiden zwischen dem Hangabtrieb  $F_A$ , der den Körper beschleunigt, und der Normalkraft  $F_N$ , die senkrecht auf  $F_A$  steht und deswegen keinen unmittelbaren Einfluß auf die Bewegung längs der schiefen Ebene nimmt.

die Arbeit ist unabhängig vom Winkel  $\varphi$ , also unabhängig von der Arbeitsmethode, insbesondere vom zurückgelegten Weg!

#### 4.1.2 Reibungsarbeit

Die Gleitreibung  $R$  erfordert den Arbeitsaufwand

$$W_R = R \cdot s \quad (4.3)$$

und entsteht entgegen der Bewegungsrichtung. Unser Sklave hat also zusätzlich noch diese Arbeit zu erbringen. Diese Arbeit (und die gegen den Widerstand des Mediums, in dem man sich bewegt) ist von jedem Reisenden aufzubringen.

### 4.1.3 Coulomb-Reibung

Bewegt sich ein Körper ohne Schmierung auf einer festen Unterlage, so ist die Reibungskraft in erster Näherung unabhängig von der Geschwindigkeit und wird allein durch die Normalkraft, die den Körper auf die Unterlage drückt, bestimmt ( $f$  ist der Reibungskoeffizient):

$$\mathbf{R} = f\mathbf{N} = f \cdot G \cos \varphi. \quad (4.4)$$

Geschwindigkeitsunabhängig ist die Bewegung deshalb, weil bei jeder Verschiebung um  $dx$  eine Vielzahl von mikroskopischen Vorsprüngen überwunden oder abgeschliffen werden muß. Da diese Arbeit ebenfalls proportional  $dx$  ist, genauso, wie die Geschwindigkeit auch, wird

$$dW = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Die Haftreibung ist deswegen größer als die Gleitreibung, weil ein ruhender Gegenstand sich besser verzahnen kann als ein gleitender.

Der Koeffizient  $f$  wird bestimmt aus dem Winkel der schiefen Ebene, bei dem der Körper gerade anfängt zu rutschen (s. Abb. 4.1). Da die Reibungskraft nach Gl. (4.4) dann gerade gleich groß wie der Hangabtrieb nach Gl. (4.2) ist, ergibt sich der Reibungskoeffizient nach

$$F_A = fF_N \Rightarrow mg \sin \varphi = fmg \cos \varphi \Rightarrow f = \tan \varphi. \quad (4.6)$$

### 4.1.4 Stokes-Reibung

$$\mathbf{R} = 6\pi\eta r\mathbf{v}. \quad (4.7)$$

Die genaue Besprechung erscheint in der Mechanik deformierbarer Medien (Kap. 7).

### 4.1.5 Newton-Reibung

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}c_w\rho Av^2. \quad (4.8)$$

Dabei ist der Luftwiderstandsbeiwert  $c_w$  für eine Kugel etwa Eins. Fällt eine Kugel mit der Geschwindigkeit  $v$  in einem Medium der Dichte  $\rho$  und verdrängt dabei eine Säule der Länge  $l$  und dem Volumen  $V$ :

$$dl = vdt \Rightarrow dV = Adl = Avdt, \quad (4.9.1)$$

dann ist die verdrängte Masse

$$dm = \rho Avdt, \quad (4.9.2)$$

die die kinetische Energie

$$dE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho Av^3 dt \quad (4.10)$$

erhält. Der Faktor vor dem Differential ist aber die Leistung  $P$ , die man auch als  $P = Fv$  schreiben kann, womit sich obiger Faktor von  $\frac{1}{2}\rho Av^2$  ergibt.

#### 4.1.6 Spannarbeit

Für die Dehnung einer Feder gilt das HOOKEsche Gesetz, nachdem die zum Dehnen erforderliche Kraft proportional zum Weg zunimmt (Abb. 3.7). Gl. (4.1) setzt aber eine konstante Kraft voraus. Daher müssen wir die Gl. (3.24) integrieren:

$$W = \int_0^s D \cdot x dx = \frac{1}{2} Dx^2 \Big|_0^s = \frac{1}{2} Ds^2, \quad (4.11)$$

also die Hälfte des Wertes, den wir mit der Gl. (4.1) erhalten würden.

#### 4.1.7 Beschleunigungsarbeit

Die konstante Kraft  $\mathbf{F}$  ( $= m\mathbf{a}$ ) beschleunige einen Körper der Masse  $m$  während der Zeit  $t$  von Null auf die Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \mathbf{G}t$ , wobei der Weg  $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$  zurückgelegt worden sei.

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}m(\mathbf{a}t)^2 = \frac{1}{2}mv^2 : \quad (4.12)$$

*die Beschleunigungsarbeit hängt nur noch von der Endgeschwindigkeit  $v$  und der Masse  $m$  ab, aber nicht mehr von der beschleunigenden Kraft!*

Was ist, wenn die Kraft über den Weg nicht konstant ist?

$$W = \int F(s) ds = \int ma(s) ds. \quad (4.13)$$

Wir substituieren  $s$  durch  $t$ :

$$s = s(t) \Rightarrow s_1 = s(t_1) \wedge s_2 = s(t_2) \Rightarrow ds = \frac{ds}{dt} dt = v dt \quad (4.14)$$

und erhalten

$$W = \int m \frac{dv}{dt} v dt = m \int v \frac{dv}{dt} dt = m \int v dv = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_0^v = \frac{1}{2}mv^2, \quad (4.15)$$

und wir nennen diese Arbeit *kinetische Energie*.

#### 4.1.8 Physikalische gegen tägliche Arbeit

Die physikalische Definition der Arbeit stimmt nicht mit dem unserer Erfahrung überein. Wie unsere Schweißtropfen beim Tragen einer Last beweisen, verrichten wir dabei sehr wohl Arbeit, und im klassischen Fall des Kohlsackschleppers wird dieser für

seine Arbeit bezahlt. Auch Büroarbeit, die im physikalischen Sinne keine Arbeit ist, wird vom Betrieb bezahlt, nicht dagegen das Surfen im Internet, für das man selbst etwas bezahlen muß. Die Definition ist aus Konsistenzgründen erforderlich. Nach Gl. (4.1) leistet eine senkrecht zum Weg angreifende Kraft keine Arbeit. Für den numerischen Wert der physikalischen Arbeit ist es gleichgültig, aus welchen Zahlenfaktoren  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{s}$  sich das Produkt zusammensetzt, was in der *Goldenen Regel der Mechanik* verdichtet ist: *Was an Kraft gewonnen wird, muß an Weg zugesetzt werden.*

## 4.2 Energie

### 4.2.1 Potentielle Energie

Die an einem Teilchen verrichtete Arbeit unterschiedlicher Art verschwindet nicht, sondern bleibt in diesem erhalten, und wir sagen, er habe die Arbeit gespeichert oder er besitze *Energie*, d. h. die Fähigkeit, Arbeit zu leisten. Die im Beispiel 4.1 hochgehobene Hantel hat die Arbeit  $Gh$  gespeichert. Das ist seine *potentielle Energie* von lat. = möglich. Diese Möglichkeit wird real, wenn die Hantel hinunterfällt und die *potentielle Energie* ( $E_{\text{pot}}$  oder  $V$  oder  $U$ ) teilweise oder vollständig *in Bewegungsenergie umgewandelt* wird. Diese Energie kann z. B. Deformationsarbeit am Skelett verrichten (Abb. 4.3).

### 4.2.2 Andere Energien

- Elektrische Energie
- Magnetische Energie
- Wärmeenergie, auch Reibungswärme?
- Chemische Energie
- Strahlungsenergie

## 4.3 Kraft und Potentielle Energie

- Beliebiger Raumpunkt (Ursprung) ist Bezugspunkt.
- Arbeit von 0 zu einem beliebigen Punkt  $P$  ist  $-U$ .
- Potentielle Energie im Punkt  $P$  ist  $U(x, y, z)$ .
- Arbeit zwischen 1 und 2 ist

$$W_{12} = U_1 - U_2. \quad (4.16)$$



**Abb. 4.3.** (Ungesteuerte) Umwandlung von potentieller in kinetische Energie.

- Zwischen 2 infinitesimal entfernten Punkten 1 und 2 leistet die konservative Kraft<sup>1</sup> die Arbeit

$$-dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (4.17)$$

wobei  $d\mathbf{s}$  die Differenz der Radiusvektoren zwischen 1 und 2 ist  $\Rightarrow$

$$-dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = -\frac{dU}{dr} : \quad (4.18)$$

- Die Kraftkomponente in einer bestimmten Richtung ergibt sich durch Ableitung von  $U$  in dieser Richtung.
  - In einer Richtung, in der die potentielle Energie anwächst ( $dU/ds > 0$ ), ist die Komponente der Kraft negativ: die Kraft hat immer die Richtung abnehmender potentieller Energie.
  - Da die Ableitung einer Funktion an Stellen, an denen diese ein Maximum oder ein Minimum annimmt, verschwindet, ist die Kraft an diesen Extremwerten Null.

#### Beispiel 4.3. Feder.

$$-\frac{dV(x)}{dx} = F(x) = -\frac{1}{2} \frac{dDx^2}{dx} = -Dx \quad (4.19)$$

## 4.4 Energie und Erhaltung der Energie

Diese Versuche, Arbeit und Energie genau zu messen, führten dazu, daß man semantisch die Gleichheit von Arbeit und Energie erkannte und weiterhin feststellte, daß sich

---

<sup>1</sup>Das Gegenteil von konservativ ist dissipativ. Energie geht dem System z. B. durch Reibung verloren.

unterschiedliche Energieformen bei geschickter Prozeßführung nahezu vollständig und reversibel ineinander überführen lassen (mechanisches und elektrisches Wärmeäquivalent). Die Begriffsbildung des *Abgeschlossenen Systems* gehört hierher, denn es gilt folgender Satz:

**Satz 4.1** In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie konstant. Sie wird oft auch als *Innere Energie* bezeichnet.

In mechanischen Systemen besteht die Energie oft aus den zwei Komponenten potentielle und kinetische Energie. Leisten wir Beschleunigungsarbeit und schreiben dazu die Gl. (4.15) geringfügig anders:

$$dW = F_s ds = m \frac{dv}{dt} ds = mv dv = d\left(\frac{m}{2}v^2\right), \quad (4.20)$$

so sehen wir, daß die geleistete Arbeit gleich der Zunahme der kinetischen Energie ist. Diese ist gleich der Abnahme der potentiellen Energie:

$$dW = -dU \Rightarrow d\left(U + \frac{m}{2}v^2\right) = 0 \Rightarrow dE = 0 \Rightarrow \int dE = \text{const.} \quad (4.21)$$

Bei der gegenseitigen Umwandlung ist Reibung oft störend, die allerdings den aus Massachusetts stammenden, später in den Diensten des bayerischen Hofes stehenden Grafen *Rumford* zum erstenmal dazu führte, die beim Bohren von Kanonenrohren entstehende Wärme als Energieform anzuerkennen.<sup>2</sup> Diese durch Reibung verlorengelassene kinetische Energie gibt das System also ab, das daher nicht mehr als abgeschlossen betrachtet werden kann, und aus dem wir die weitere Schlußfolgerung ziehen:

**Satz 4.2** Jede zeitliche Änderung der inneren Energie eines nicht abgeschlossenen Systems ist gleich der dem System von außen zu- oder der nach außen abgeführten Arbeit.

**Beispiel 4.4. Die Achterbahn.** Die maximale potentielle Energie wird unter möglichst geringem Reibungsverlust in kinetische Energie und wieder zurückgewandelt. Der Absolutbetrag der kinetischen Energie ist klar definiert. Dies ist bei der potentiellen Energie anders, die auch in ihrem Minimum: dann, wenn  $E_{\text{kin}}$  im Tal am höchsten ist, noch einen (additiven) Wert besitzen kann. Da wir uns aber immer um Änderungen kümmern, ist die Frage nach einer wie auch immer gearteten „Nullpunktsenergie“ ohne Belang:

*Ex nihil nihil fit: Aus Nichts wird nichts* (ROBERT MAYER).

---

<sup>2</sup>Jetzt konnte von unseren Kollegen an der Universität Augsburg mit einem Rasterkraftmikroskop die atomare Ursache gefunden werden (F. GIESSIBL et al., Proceedings der American National Academy of Science **99**, 12006 (2002)): Atome werden durch gegenseitige Anziehung zwischen Spitze des Mikroskops und Unterlage (Bohrer und Vollrohr im Falle des Grafen RUMFORD) so weit aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt, daß sie sich im sog. „anharmonischen“ Bereich der Potentialkurve befinden. Ein Zurückschnellen in die Gleichgewichtslage ist jedoch mit irreversibler Abgabe von Energie (Wärme) verbunden (loc. cit. F.A.Z. Nr. 231 v. 05. Okt. 2002, S. 30)

### 4.4.1 Gravitationspotential

Bei Annäherung eines Körpers mit der Masse  $m$  an einen Körper mit der Masse  $M$ , welcher ihn nach dem Gravitationsgesetz anzieht, aus sehr großer Entfernung auf den Abstand  $r$  wird Arbeit verrichtet und Energie gewonnen:

$$W = \int_{\infty}^r \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = -\gamma m M \frac{1}{r}. \quad (4.22)$$

dabei ist  $\gamma M \frac{1}{r}$  das *Potential* des Ortes  $r \Rightarrow$

$$W = -m\Phi(r). \quad (4.23)$$

Das Potential wird durch die Arbeit gemessen, die aufgewendet werden muß, um die Masseneinheit von  $P$  ins Unendliche zu bringen.

## 4.5 Feld und konservative Kraft

**Beispiel 4.5.** Wie groß ist die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$ , die eine Hantel der Masse  $m = 100$  kg gewinnt, wenn sie in Hamburg auf 0 m Seehöhe um  $h = 2$  m (über den Kopf des Schwerathleten mit gestreckten Armen!) gestemmt wird?

$$W = \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} = mg \cdot h = 100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/sec}^2 \cdot 2 \text{ m} = 1962 \text{ J}. \quad (4.24)$$

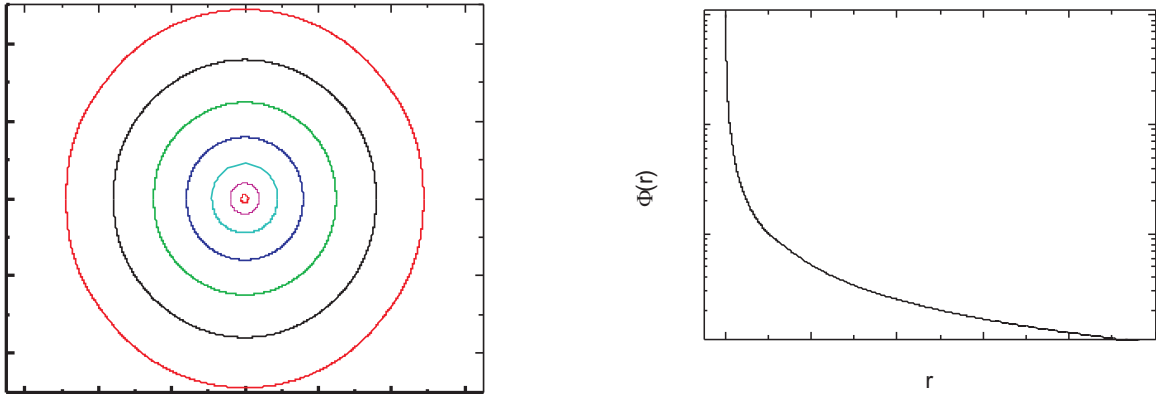
Warum sind die Bedingungen so wichtig? Weil an jedem Punkt der Erdoberfläche eine Kraft angreift, die, je nach Höhe (gemessen zum Meeresspiegel) und geographischer Lage (gemessen zum Äquator oder Pol, Zentrifugalkräfte!), geringfügig verschieden ist. Es ist entscheidend zur Berechnung der potentiellen Energie, ob wir uns also auf der Erde, dem Mond oder im erdnahen All befinden!

Wir bezeichnen die Gesamtheit aller Kräfte, die an jedem Raumpunkt angreifen, als *Kraftfeld*. Diese können sich von Ort zu Ort ändern und zeitabhängig sein. Sind sie zeitunabhängig, heißen sie *statisch* oder *stationär*, und wir können definieren:

Ein Feld einer physikalischen Größe  $A$  ist eine Menge von Zahlenwerten  $A(\mathbf{r})$ , welche jedem Ort  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  des Raumes zugeordnet wird. Felder können skalarer, vektorieller oder auch tensorieller Natur sein, über den Ortsraum oder auch andere Räume definiert sein und auch höherdimensionaler als 3 sein. Skalare Felder verhalten sich invariant gegenüber einer Koordinatentransformation, vektorielle Felder nicht. Wegen der schwierigen Darstellung bevorzugt man entweder Höhenlinien oder geht ins Zweidimensionale zurück, indem man eine Koordinate konstant läßt (Abb. 4.4).

Aus den Beispielen der Hubarbeit haben wir gesehen, daß die gegen das Erdfeld geleistete Arbeit unabhängig vom Integrationsweg ist. Kräfte, bei denen die Arbeit nur von Anfangs- und Endzustand abhängt, bezeichnen wir als *konservativ*. Dazu zählen

- Gravitationskraft,



**Abb. 4.4.** Darstellung des skalaren Feldes  $\Phi(\mathbf{r}) = 1/r$  als „Höhenlinie“ und als Auftragung gegen eine Variable bei gleichzeitiger Konstanthaltung der anderen.

- Federkraft,
- Elektrische Kraft,
- aber nicht: Reibungskraft!

Was bedeutet das für einen geschlossenen Weg? Die Arbeit ist Null!

## 4.6 Gravitationsfeld

Die Tatsache, daß die an einem Teilchen angreifende Gravitationskraft seiner Masse proportional ist, ermöglicht die Einführung der Stärke des Gravitationsfeldes:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} : \quad (4.25)$$

die Feldstärke  $\mathbf{g}$  hängt nur ab von den Massen und von der Anordnung der das Feld erzeugenden Körper, aber *nicht von der Masse des beschleunigten Teilchens*:

**Satz 4.3** *In einem Gravitationsfeld erfahren alle Körper unabhängig von ihrer Masse dieselbe Beschleunigung. Da es um eine Punktmasse kugelsymmetrisch ist, ist es konservativ.*

### 4.6.1 Freier Fall

$$E = T + U = \text{const} \Rightarrow d(V + T) = 0 \Rightarrow -\Delta U = +\Delta T. \quad (4.26)$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}. \quad (4.27)$$

## 4.7 Potentielle Energie und Kraft

In einem konservativen Kraftfeld kann man also die Energie als Linienintegral über der Kraft ermitteln (Gln. 4.17 u. 4.18), und umgekehrt ist die räumliche Ableitung des skalaren Feldes, der Gradient, die Kraft:

$$-dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{F} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\nabla U, \quad (4.28)$$

Ein (vektorielles) konservatives Kraftfeld kann also ebensogut durch das (skalare) Energie- oder Potentialfeld beschrieben werden. Der Vorteil ist der einer einfacheren mathematischen Beschreibung. Schreiben wir umgekehrt für eine Änderung des Potentials (der Energie)

$$\Delta U = \nabla U \cdot \Delta \mathbf{r}, \quad (4.29)$$

sehen wir, daß für den Winkel  $90^\circ$  die Änderung des Potentials Null sein muß. Die Gesamtheit dieser Punkte, an denen das Potential sich nicht ändert, bezeichnet man als Äquipotentialfläche: *Der Gradient eines skalaren Feldes steht senkrecht auf dessen Äquipotentialflächen.*

Im Gravitationsfeld der Erde steht z. B. senkrecht auf dem  $\mathbf{g}$ -Vektor die Äquipotentialfläche der Ozeane.

**Beispiel 4.6. Quadratisches radiales Feld.**  $U \propto r^2 \Rightarrow \nabla r^2 = 2r$ .

## 4.8 Homogenität und Äquivalenzprinzip

**Rakete im interplanetaren Raum.** Alle in der Rakete befindlichen Körper schweben und sind gegenüber der Rakete in Ruhe. Wird der Rakete eine Beschleunigung  $-\mathbf{a}$  erteilt, fallen alle Gegenstände mit der Beschleunigung  $\mathbf{a}$  nach vorne. Ebenso verhalten sich jedoch die Körper incl. Rakete beim Eintritt in ein Schwerfeld der Stärke  $\mathbf{a}$ .

Es gibt kein Experiment, daß uns die Unterscheidung ermöglichte, ob man sich in einem beschleunigt bewegten System (Rakete) oder in einem homogenen Gravitationsfeld befindet (*Äquivalenzprinzip*).

*Homogen* bedeutet: das Feld verändert sich so geringfügig, daß es als konstant angesehen werden kann in Bezug auf Richtung und Betrag und keine zeitliche Abhängigkeit aufweist. Im speziellen Fall der Erde ist in Bereichen, deren Abmessungen klein gegen den Erdradius (z. B. Fallschirmspringer aus 3 km Höhe) sind, das *Gravitationsfeld* homogen und konstant.

Das bedeutet weiterhin, daß die Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems nicht von seiner Lage im Raum abhängen:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{R}_i = 0 : \quad (4.30)$$

die Summe der Kräfte verschwindet. Damit sehen wir, daß *die Homogenität des Raumes die Ursache für die Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung des Impulses ist.*

### 4.8.1 Bewegung im homogenen Feld

Integriert man die Kraftgleichung (3.7)

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (3.7)$$

ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}}{m}t : \quad (4.31)$$

- das Teilchen bewegt sich in einer Ebene, die durch  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{v}_0$  aufgespannt wird,
- im homogenen konstanten Kraftfeld ist die Geschwindigkeit eine lineare Funktion der Zeit.

Sei die Kraft parallel zu  $y$ , dann erhalten wir für die Komponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  Einheitsvektoren)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_y = v_{0y} + \frac{F}{m}t & \frac{dx}{dt} &= v_x = v_{0x} \\ y &= \frac{F}{2m}t^2 + v_{0y}t + y_0 & x &= v_{0x}t + x_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Legt man den Ursprung auf  $x_0 = y_0 = 0$ , wird

$$y = \frac{F}{2m}t^2 + v_{0y}t \quad x = v_{0x}t \quad (4.33)$$

und bei Eliminierung von  $t$  das Ergebnis, das wir schon beim schiefen Wurf erhielten:

$$y = \frac{F}{2mv_0^2}x^2 : \quad (4.34)$$

**Satz 4.4** *In einem homogenen Feld bewegen sich die Teilchen auf Parabelbahnen.*

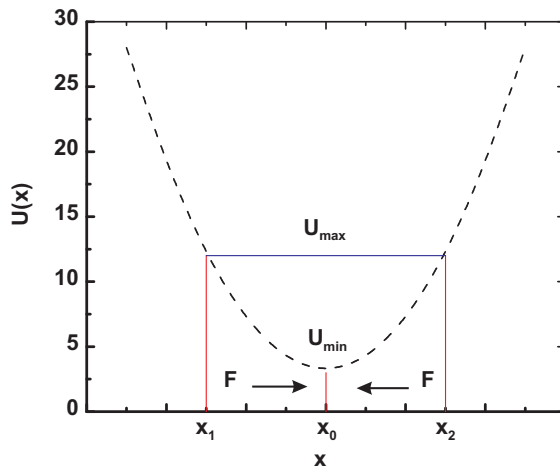
## 4.9 Grenzen der Bewegung

Wie wir am Beispiel der Achterbahn gesehen haben, kann das Teilchen während seiner Bewegung nur Orte erreichen, an denen die potentielle Energie kleiner oder höchstens gleich der Gesamtenergie ist (Abb. 4.5):

$$E = T + U = \frac{m}{2}v^2 + U(x) = \text{const}, \quad (4.35)$$

und wir definieren:

- *Endliche Bewegung*: Bewegung, bei der das Teilchen in einem endlichen Raumgebiet bleibt.
- *Unendliche Bewegung*: Das Teilchen kann sich beliebig weit entfernen.



**Abb. 4.5.** Die Potentialkurve zeigt Bewegungsfreiheit zwischen  $x_1$  bis  $x_2$ , da hier  $E \geq U$ .

- *Eindimensionale Bewegung:* Das Teilchen kann sich nur entlang einer Koordinate bewegen und besitzt nur einen *Freiheitsgrad*.

Bewegung vom Extrempunkt ( $x_1$  oder  $x_2$ ) nach  $x_0$ , wo die potentielle Energie ein Minimum aufweist:

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0 : \quad (4.36)$$

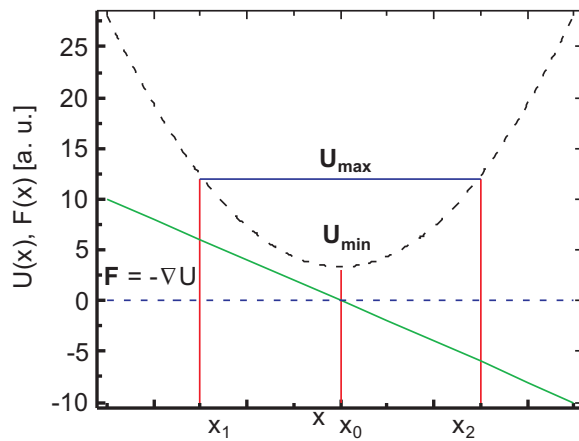
an dieser Stelle bewegt sich das Teilchen *kräftefrei*, und es liegt ein *stabiles Gleichgewicht* vor. Die kinetische Energie hat dort ein Maximum. Wie ist die Kraft gerichtet?

- $F$  ist positiv zwischen  $x_1$  und  $x_0$ : in Richtung abnehmender (stärker negativ werdender)  $x$ -Werte nimmt  $F$  zu;
- $F$  ist negativ zwischen  $x_2$  und  $x_0$ : in Richtung zunehmender  $x$ -Werte nimmt  $F$  ab (Abb. 4.6).

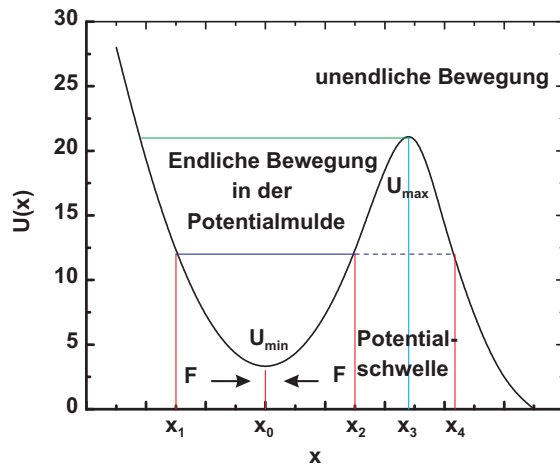
Je größer die Auslenkung, um so größer die rücktreibende Kraft Richtung Minimum der potentiellen Energie. Das stabile Minimum zeichnet sich dadurch aus, daß keine Kraft am Teilchen angreift.

Im Beispiel der Abb. 4.5 führt das Teilchen eine periodische Bewegung aus, und die Schwingungsdauer ist dabei doppelt so lang wie die Zeit, die es für das Zurücklegen der Zeit zwischen  $x_1$  und  $x_2$  benötigt.

Gewinnt das Teilchen potentielle Energie über  $U_{\max}$  hinaus, so daß es die Potentialschwelle überschreiten kann, kann die endliche in eine unendliche Bewegung übergehen. Das Teilchen verläßt dann die Potentialmulde. An der Stelle  $x_3$  ist der Gradient der potentiellen Energie ebenfalls Null, so daß an diesem außerordentlichen Punkt Kraft und kinetische Energie verschwinden (Abb. 4.7). Für den Fall der Achterbahn bedeutet das, daß hinter  $x_3$  der nächste Absturz in positive  $x$ -Richtung mit endlicher Geschwindigkeit begonnen wird.



**Abb. 4.6.** Die Kraft ist der negative Gradient der potentiellen Energie; bei einer Bewegung mit einem Freiheitsgrad wirkt daher die Kraft bei Auslenkung in den beiden möglichen Richtungen der eindimensionalen Bewegung stets rüctreibend in Richtung des Energieminimums.



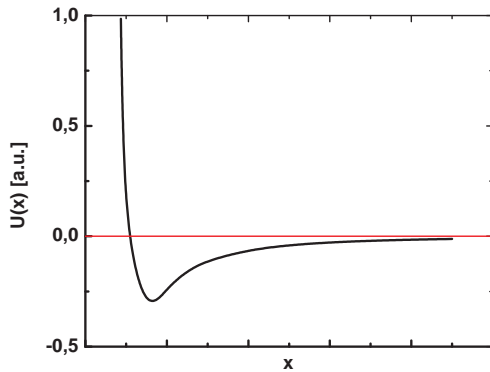
**Abb. 4.7.** Gewinnt das Teilchen potentielle Energie über  $U_{\max}$  hinaus, so daß das Teilchen die Potentialschwelle überschreiten kann, kann die endliche in eine unendliche Bewegung übergehen. Ist  $U_{\max}$  kleiner als die Energieschwelle, wäre die kinetische Energie im Potentialwall negativ, die Geschwindigkeit imaginär.

Jenseits von  $x_3$  wird das Teilchen beschleunigt. Da im Unendlichen die potentielle Energie Null ist, erreicht das Teilchen dort die Geschwindigkeit

$$v_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (4.37)$$

Ein sehr wichtiger Fall ist der Potentialverlauf bei der Molekülbildung, bei der man die potentielle Energie bei unendlich weit voneinander entfernten Molekeln auf Null setzt (Abb. 4.8).

Da die Kraft immer in Richtung abnehmender potentieller Energie geht, führt die Annäherung von Teilchen, die sich einander anziehen, zu einer Abnahme der potentiellen Energie, und die Bewegung bleibt immer endlich.



**Abb. 4.8.** Bei der Molekülbildung wird das Normal der potentiellen Energie im Unendlichen auf Null gesetzt.

## 4.10 Impuls

Unter einem *Stoß* verstehen wir Wechselwirkungsprozesse im weitesten Sinn. Die Körper brauchen sich dazu nicht notwendig zu berühren. Sind sie unendlich weit voneinander entfernt, bezeichnen wir ihren Zustand als *frei bewegt*. Bewegen sie sich aufeinander zu, kann eine Wechselwirkung vielfältiger Art auftreten: sie können sich vereinigen, es können neue Teilchen entstehen, und es können „einfache“ mechanische Stöße stattfinden: elastische oder unelastische.

- Elastischer Stoß: Austausch von kinetischer Energie und Impuls, die innere Energie der Teilchen verändert sich nicht.
- Unelastischer Stoß: Neben dem Austausch von kinetischer Energie und Impuls verändert sich zusätzlich die innere Energie der Stoßpartner.

### 4.10.1 Elastische Stöße

Zwei Teilchen, davon eins vorher in Ruhe.  $v$  bezeichnet die Geschwindigkeit vor,  $u$  nach dem Stoß:

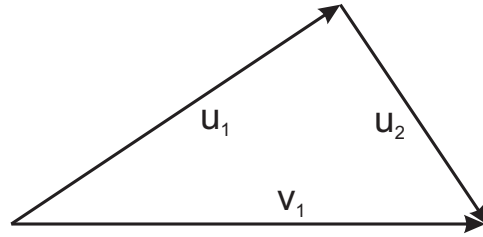
$$\begin{aligned} m_1 v_1^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2, \\ m_1 \mathbf{v}_1 &= m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2. \end{aligned} \quad (4.38)$$

#### 4.10.1.1 Grenzfall 1: Große Massenunterschiede. $m_2 \gg m_1$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{m_1}{m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) \Rightarrow \mathbf{u}_2 \approx 0 \Rightarrow \mathbf{u}_1 = -\mathbf{v}_1 \quad (4.39)$$

#### 4.10.1.2 Grenzfall 2: Gleiche Massen. $m_1 = m_2$

Mit Energie- und Impulserhaltungssatz folgt:



**Abb. 4.9.** Sind die Massen der stoßenden Teilchen gleich, fliegen sie rechtwinklig auseinander.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \wedge v_1^2 = u_1^2 + u_2^2. \quad (4.40)$$

Die Vektoren  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$  bilden auf Grund der ersten Beziehung ein Dreieck, das auf Grund der zweiten Beziehung rechtwinklig ist und die Hypotenuse  $\mathbf{v}_1$  besitzt: *Teilchen gleicher Masse fliegen also nach dem Stoß rechtwinklig auseinander* (s. Abb. 4.9).

**4.10.1.3 Grenzfall 3 (Zentraler Stoß).** Beliebige Massen und zentraler Stoß, bei dem sich beide Teilchen nach dem Stoß auf einer Geraden bewegen, die in der Geschwindigkeitsrichtung des ankommenden Teilchens liegt ( $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{u}_2$ ): die Geschwindigkeitsvektoren können durch ihre Beträge ersetzt werden.

$$m_2 u_2 = m_1 (v_1 - u_1) \wedge m_2 u_2^2 = m_1 (v_1^2 + u_1^2). \quad (4.41)$$

Division der zweiten durch die erste Gleichung ergibt

$$u_2 = v_1 + u_1 \Rightarrow u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \wedge u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 : \quad (4.42)$$

1.  $m_1 \gg m_2$ : Teilchen mit der Masse  $m_1$  bewegt sich nahezu ungestört in derselben Richtung weiter.
2.  $m_1 = m_2$ :  $u_1 = 0, u_2 = v_1$ : Teilchen (1) bleibt stehen, Teilchen (2) fliegt mit der Geschwindigkeit des ankommenden Teilchens (1) davon.
3.  $m_1 < m_2$ : Geschwindigkeitsrichtung des ankommenden Teilchens dreht sich um.
4.  $m_1 \ll m_2$ : Teilchen (2) ruht, Teilchen (1) fliegt in der entgegengesetzten Richtung davon.

Aus der Gleichung der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß ergibt sich die Beziehung

$$\sum_i p_{i,\text{vor}}^2 = \sum_i p_{i,\text{nach}}^2 : \quad (4.43)$$

die Summe der Beträge der Impulse ändert sich nicht. Der Stoß führt also lediglich zu einer *Drehung der Impulsvektoren*. Der Winkel, um den sich die Geschwindigkeiten drehen, wird allerdings nicht durch die Erhaltungssätze allein bestimmt, sondern hängt auch von der konkreten Form der Wechselwirkung und der gegenseitigen Anordnung beim Stoß ab.

#### 4.10.2 Schwerpunkt

Wir sahen eben bei der Definition des Impulses die Notwendigkeit, die Wechselwirkung zweier Teilchen aufeinander zu studieren. Was ist, wenn wir etwas realer werden und ein ganzes System von Teilchen betrachten?

*Schwerpunkt = Massenmittelpunkt*: Mittelwerte der Koordinaten aller Teilchen, gewichtet um die Masse, z. B. für die  $x$ -Koordinate:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}, \quad (4.44)$$

entsprechend für die beiden anderen Raumkoordinaten. Zusammengefaßt zum sog. *Radiusvektor* und vektoriell:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad (4.45)$$

mit  $\mathbf{r}_i$  den Radiusvektoren der einzelnen Teilchen. Wie groß ist seine Geschwindigkeit  $\mathbf{V}$ ?

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}, \quad (4.46.1)$$

wobei im Zähler die Produkte zwischen den Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen und ihren Massen, also ihre Impulse, und im Nenner die Massen selbst aufsummiert werden:

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\mathbf{P}}{M}. \quad (4.46.2)$$

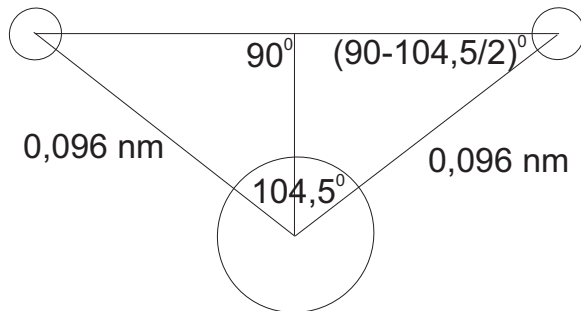
Daraus ersehen wir zweierlei:

- Da der Gesamtimpuls des Systems erhalten bleibt, ändert sich die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nicht.
- Zwischen Gesamtimpuls, Geschwindigkeit des Schwerpunktes und der gesamten Masse des Systems besteht derselbe Zusammenhang wie zwischen Impuls, Masse und Geschwindigkeit eines einzelnen Teilchens. Das System verhält sich so, als sei seine gesamte Masse in einem Teilchen im Schwerpunkt zusammengeballt. Ein mit dem Schwerpunkt verbundenes Bezugssystem stellt folglich ein Inertialsystem dar (*Schwerpunktsystem*).

Allerdings: der Schwerpunkt ist eine reine Rechengröße. Wie man am Hufeisen sieht, kann er sogar außerhalb des betrachteten Systems liegen. Dazu folgendes Beispiel:

**Beispiel 4.8. Schwerpunkt eines trigonalen Moleküls.** Der Abstand zwischen O (16 Masseneinheiten) und H (1 Masseneinheit) im Wassermolekül beträgt  $0,96 \text{ \AA}$ , der Bindungswinkel liegt bei  $104,5^\circ$ . Wo liegt der Schwerpunkt des Moleküls?

Zur Lösung dieses Problems legt man den Ursprung zweckmäßigerweise ins Sauerstoffatom. Die Koordinaten der Wasserstoffatome betragen nach der Skizze 4.10



**Abb. 4.10.** Das Wassermolekül hat einen Bindungswinkel von  $104,5^\circ$  und einen O-H-Abstand von  $0,96 \text{ \AA}$ . Teilt man das Molekül in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke, wird der Abstand der beiden H-Atome  $2 \cdot 0,96 \cdot \cos(90 - \frac{1}{2}104,5)^\circ$ .

$$x_H = \pm 0,96 \cdot \cos 37,75^\circ, \quad (4.47.1)$$

$$y_H = 0,96 \cdot \sin 37,75^\circ. \quad (4.47.2)$$

Damit ergibt sich aus Symmetriegründen für die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$x_S = \frac{(-0,759 + 0,759) \cdot 1}{18} = 0, \quad (4.48.1)$$

$$y_S = \frac{(0,59 + 0,59) \cdot 1}{18} = 0,066. \quad (4.48.2)$$

Es ist klar, daß diese Prozedur bei kontinuierlichen Massenverteilungen nicht anwendbar ist (s. Übungsaufgaben z. Kap. 4).

## 4.11 Leistung

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \dot{W}. \quad (4.49)$$

Die Einheit ist 1 Watt und ist 1 J/sec.

Die Leistung kann auch  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  sein! Wichtig ist die Messung der Leistung von Motoren, wo sie definiert ist als Produkt aus Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit.

## 4.12 Aufgaben und Lösungen

**Aufgabe 4.1** Was ist der Vorzug großer Raddurchmesser (Formel-1-Fahrzeuge, aber auch Traktoren und Unimogs)? Rechnen Sie mit einem maximalen Reibungskoeffizient Gummi/trockene und griffige Straße von 0,8 für Normalverbraucher!

**Lösung.** Die Rutschgrenze beim Anfahren ist erreicht, wenn die durch die Straße (oder den Schlamm) aufgenommene Reibung gleich der Normalkraft wird:

$$F_N = mg \wedge R = fmg \Rightarrow a = \frac{fmg}{m} : \quad (1)$$

das auf die Räder übertragbare Drehmoment  $M = F \times r$  ist also bei grenzwertiger Normalkraft nur durch Erhöhung des Radradius zu vergrößern. Zu höheren Geschwindigkeiten ist die proportional der Geschwindigkeit zunehmende Rollreibung begrenzend:

$$P = M\omega = F \times r\omega = Fv_{\text{Grenz}} \Rightarrow v_{\text{Grenz}} = \frac{P}{F = fmg}. \quad (2)$$

**Aufgabe 4.2** Der maximale Reibungskoeffizient Gummi/trockene und griffige Straße ist 0,8, der sich auf 0,3 auf nasser Straße und auf unter 0,1 auf Glatteis reduziert. Was folgt für Bremsweg und Durchfahrt in Kurven?

**Lösung.** Der Bremsweg (s. Aufgabe 1.5) ist umgekehrt proportional zur Reibung

$$s = \frac{1}{2}at^2 \wedge t = v/a \Rightarrow s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{fg}. \quad (1)$$

Damit wird der Bremsweg um einen Faktor  $> 8$  auf Glatteis gegenüber trockener Straße verlängert.

$$R = fmg > mv^2/r \Rightarrow v = \sqrt{fgr} \Rightarrow v_{\text{Schnee}} \approx \frac{1}{3}v_{\text{trocken}}. \quad (2)$$

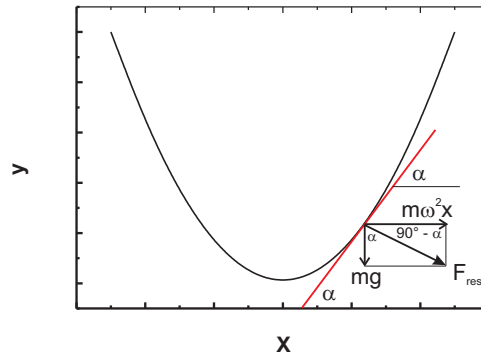
**Aufgabe 4.3** Warum sind die Kurven im Radstadion stark überhöht? Diskutieren Sie den Neigungswinkel als Funktion von Geschwindigkeit und Radius!

**Lösung.** Wir betrachten Schwerkraft und Zentrifugalkraft, deren Resultierende senkrecht auf der Radbahn stehen sollte (Abb. 1.1)

Der Neigungswinkel ergibt sich also zu

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{v^2}{rg} : \quad (1)$$

nur für eine bestimmte Geschwindigkeit ist die Überhöhung optimal.



**Abb. 4.11.** Die Resultierende von Schwerkraft und Zentrifugalkraft sollte in einer überhöhten Kurve senkrecht auf der Bahn stehen.

**Aufgabe 4.4** Der Haftreibungskoeffizient zwischen Reifen und trockener Straße ist z. B.  $f = 0,6$ , das Verhältnis Gewicht/Leistung 10 kg/PS. Wie groß ist die maximal mögliche Beschleunigung beim Anfahren (ebene Straße)? **Lösung.**

$$F_N = mg \wedge R = fmg \Rightarrow a = \frac{fmg}{m} = 6 \text{ m/sec}^2 : \quad (1)$$

Die maximal mögliche Beschleunigung ist damit unabhängig vom Leistungsgewicht!

**Aufgabe 4.5** In einem Gummiband wirkt die sog. *Kautschukelastizität*, die das (lineare) HOOKEsche Gesetz um einen quadratischen Term erweitert:

$$F = A_0 - A_1x - A_2x^2, \quad (1)$$

wobei  $A_0$  immer Null sein muß, da die Kraft für  $x = 0$  verschwinden muß. Typischerweise ist  $A_2/A_1 \approx 0,1$ . Wie groß ist die Arbeit für eine Dehnung um 5 cm bei  $A_1 = 0,5 \text{ N/m}$  und  $A_2 = 0,05 \text{ N/m}^2$ ? Wie groß ist die Korrektur durch den quadratischen Term?

**Lösung.**

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}A_1x^2 + \frac{1}{3}A_2x^3. \quad (1)$$

$$W = 0,019 \text{ J}. \quad (2)$$

Damit wird die Korrektur etwa 5%.

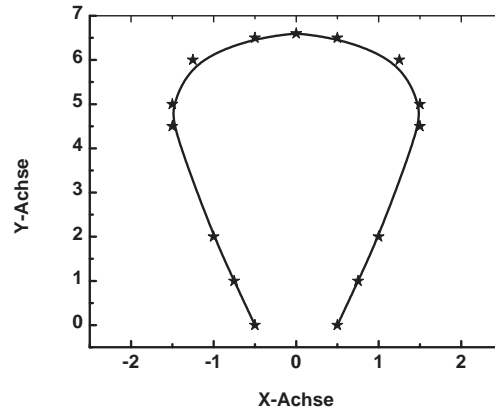


Abb. 4.12. Das Hufeisen: Schwerpunkt des Glücks?

**Aufgabe 4.6** Bestimmen Sie den Schwerpunkt des linearen HF-Moleküls (Abstand der Kerne:  $0,92 \text{ \AA}$ , Massenverhältnis 1:19) und des linearen Moleküliions  $\text{NO}^+$  (Abstand der Kerne:  $1,062 \text{ \AA}$ , Massenverhältnis 14:16)!

**Lösung.** Zweckmäßigerweise wird ein Atom in den Ursprung gelegt, so daß sich die Vektoren (in  $\text{\AA}$ )

$$\mathbf{r}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{r}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,92 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ergeben.  $\mathbf{S}$  hat dann die Koordinaten  $x_S = 0$  und

$$y_S = \frac{19}{20} \cdot 0,92 = 0,874. \quad (2)$$

Entsprechend für  $\text{NO}^+$ :

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{r}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,062 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ergibt für den Schwerpunkt:  $\mathbf{S}$  hat die Koordinaten  $x_S = 0$  und

$$y_S = \frac{16}{30} \cdot 1,062 = 0,567. \quad (4)$$

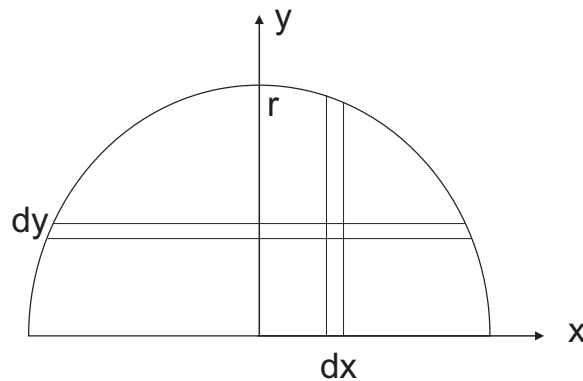
**Aufgabe 4.7** Ein Hufeisen ist (natürlich vereinfacht) durch folgende Massenverteilung charakterisiert (gleich schwere Massenpunkte, verbunden durch masselose Stangen). Wo liegt der Schwerpunkt  $\mathbf{S}$ ?

**Lösung.**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m_i} = \\
 &\left\{ \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,75 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ 5 \end{pmatrix} + \right. \\
 &+ \begin{pmatrix} -1,25 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,75 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \\
 &\left. + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,25 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 6,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6,75 \end{pmatrix} \right\} / 15 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,77 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.8** Bestimmen Sie den Schwerpunkt eines halben Kreissegments!

**Lösung.** Zur Klärung ist eine Skizze nützlich.



**Abb. 4.13.** Zum Schwerpunkt eines halben Kreissegments.

Wir erfassen alle Flächenelemente  $dx dy$ : bei konstantem  $y$  wird zunächst über alle  $x$  summiert, und dieses Ergebnis, in dem noch  $y$  als Variable steckt, über alle  $y$  summiert. Aus Symmetriegründen ist  $x_S = 0$ , die Funktion heißt  $r^2 = x^2 + y^2$ , die Massenbelegung mit  $D$  der Dicke und  $\rho$  der Dichte des Materials

$$dm = D\rho dx dy, \quad (1)$$

und die Gesamtmasse ist

$$M = \int dm = \frac{1}{2} \pi r^2 D\rho. \quad (2)$$

Die Schwerpunktkoordinate  $y_S$  liegt bei

$$y_S = \frac{1}{M} \int y dm. \quad (3)$$

$$y_S = \frac{D\rho}{M} \int_{y=0}^{y=r} \int_{x=-\sqrt{r^2-y^2}}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} y dy dx = 2 \frac{D\rho}{M} \int_{y=0}^{y=r} \int_{x=0}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} y dy dx. \quad (4)$$

$$y_S = 2 \frac{D\rho}{M} \int_{y=0}^{y=r} x \Big|_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot y dy. \quad (5)$$

$$y_S = 2 \frac{D\rho}{M} \int_{y=0}^{y=r} \sqrt{r^2-y^2} \cdot y dy. \quad (6)$$

$$r^2 - y^2 = z \Rightarrow dz = -2y dy \Rightarrow dy = -\frac{dz}{2y}. \quad (7)$$

$$\int \sqrt{z} y \cdot \frac{-dz}{2y} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{z} dz = -\frac{1}{2} \frac{2}{3} z^{3/2} \Big|_0^r. \quad (8)$$

$$-\frac{1}{3} \left[ (r^2 - r^2)^{3/2} - (r^2)^{3/2} \right] = \frac{1}{3} r^3. \quad (9)$$

$$y_S = 2 \frac{D\rho}{\frac{1}{2}\pi r^2 D\rho} \frac{r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}. \quad (10)$$

**Aufgabe 4.9** Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Parabel  $y = 4 - x^2$  bis zur  $x$ -Achse eingeschlossen wird!

**Lösung.**

Wir erfassen alle Flächenelemente  $dx dy$ : bei konstantem  $y$  wird zunächst über alle  $x$  summiert, und dieses Ergebnis, in dem noch  $y$  als Variable steckt, über alle  $y$  summiert. Aus Symmetriegründen ist  $x_S = 0$ , die Funktion heißt  $x = \sqrt{4 - y^2}$ , die Massenbelegung mit  $D$  der Dicke und  $\rho$  der Dichte des Materials

$$dm = D\rho dx dy, \quad (1)$$

und die Gesamtmasse ist

$$M = \int dm = \frac{1}{2}\pi r^2 D\rho. \quad (2)$$

Die Schwerpunktkoordinate  $y_S$  liegt bei

$$y_S = \frac{1}{M} \int y dm. \quad (3)$$

$$y_S = \frac{D\rho}{M} \int_{y=0}^{y=4} \int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} y dy dx = 2 \frac{D\rho}{M} \int_{y=0}^{y=4} \int_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}} y dy dx. \quad (4)$$

$$y_S = 2 \frac{D\rho}{M} \int_{y=0}^{y=4} x \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} \cdot y dy. \quad (5)$$

$$y_S = 2 \frac{D\rho}{M} \int_{y=0}^{y=4} \sqrt{4-y^2} \cdot y \, dy. \quad (6)$$

$$4 - y = z \Rightarrow dz = -dy \Rightarrow y = z + 4. \quad (7)$$

$$- \int \sqrt{z}(4+z)dz = -4 \int \sqrt{z} \, dz - \int \sqrt{z^3} \, dz = -4 \frac{2}{3} \sqrt{z^3} - \frac{2}{5} \sqrt{z^5}. \quad (8)$$

$$\int_{y=0}^{y=4} \sqrt{4-y^2} \cdot y \, dy = -\frac{8}{3} \sqrt{(4-y)^3} - \frac{2}{5} \sqrt{(4-y)^5} \Big|_{y=0}^{y=4}. \quad (9)$$

$$\int_{y=0}^{y=4} \sqrt{4-y^2} \cdot y \, dy = \frac{8}{3} \sqrt{64} - \frac{2}{5} \sqrt{1024} = \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}. \quad (10)$$

$$A = \int_{-2}^2 (4-x^2) \, dx = \frac{32}{3}. \quad (11)$$

$$M = D\rho A = \frac{32}{3} D\rho. \quad (12)$$

$$y_S = 2 \frac{3}{32} \frac{128}{15} = \frac{8}{5} = 1,6. \quad (13)$$



# 5 Mechanik des starren Körpers

Bisher haben wir die Bewegung von Körpern betrachtet, die als Massenpunkte approximiert werden können. Hat ein Körper eine endliche Ausdehnung, aber ändert sich die Anordnung seiner Bestandteile nicht während der Bewegung, verhält sich also wie einheitliches Ganzes, spricht man vom *starren Körper*. Die Translation besteht folglich in einer Parallelverschiebung, die Drehung um eine oder mehrere Achsen wird als Rotation bezeichnet. Dabei beschreiben die einzelnen Punkte des Körpers Kreise, deren Ebenen senkrecht zur Drehachse liegen.

Jede Bewegung des starren Körpers läßt sich durch eine Folge von Translationen und Rotationen beschreiben. Die beiden Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  sind bezüglich irgendeines Koordinatensystems durch je drei Komponenten gegeben. Damit sind insgesamt sechs unabhängige Größen erforderlich, um die Geschwindigkeit eines starren Körpers vollständig zu erfassen, und man sagt:

**Satz 5.1** Ein starrer Körper stellt ein mechanisches System mit 6 Freiheitsgraden dar.

## 5.1 Kinematik der Rotation

Wenn ein Körper sich in der Zeit  $dt$  um den Winkel  $d\varphi$  dreht, ist der Weg  $ds$ , den er zurücklegt, abhängig vom Abstand dieses Punktes von der Drehachse, und zwar ist er diesem proportional:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi} \Rightarrow d\mathbf{s} = \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\varphi} : \quad (5.1)$$

diese Verschiebung ist senkrecht zur Fläche, die durch den axialen Vektor  $\boldsymbol{\varphi}$  und den polaren Vektor  $\mathbf{r}$  gebildet wird. Bei einem Umlauf wird ein Winkel von  $2\pi$  zurückgelegt:

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi i. \quad (5.2)$$

Wir definieren weiter die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ , die das Analogon zur translatorischen Geschwindigkeit darstellt, und die man sich als „Stärke“ der Drehung ( $2\pi$ -fache Drehungen pro sec) vorstellen kann:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \wedge \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} : \quad (5.3)$$

die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  hat die Richtung der Drehachse, ist also parallel zu  $\boldsymbol{\varphi}$  und ebenfalls ein axialer Vektor, und den Betrag  $\omega$ . Für die Beschleunigung  $\mathbf{a}_N$  gilt

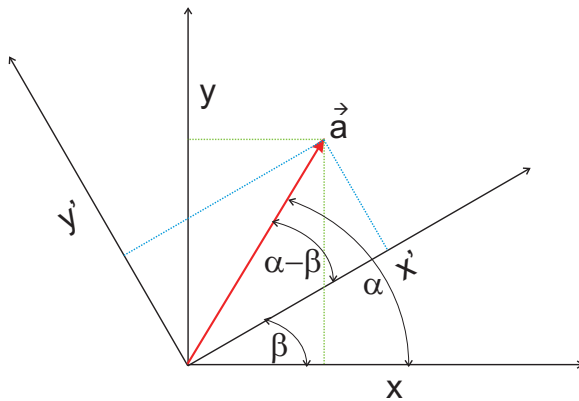
$$\mathbf{a}_N = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \Rightarrow \mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (5.4)$$

Da bei der Kreisbewegung  $\mathbf{a}_N$  senkrecht auf  $\mathbf{v}$  steht, ist die Beschleunigung radial auf den Mittelpunkt des Kreises entgegen  $\mathbf{r}$  gerichtet. Damit wird die Winkelbeschleunigung Null:

$$\mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{d}{dt}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = -r\omega^2. \quad (5.5)$$

### 5.1.1 Komponentendarstellung

**5.1.1.1 Koordinaten.** Wir überlegen uns zunächst die Koordinaten eines Vektors  $\mathbf{a}$  im Koordinatensystem I mit den Koordinaten  $x$  und  $y$ , der in der  $z$ -Achse um den Winkel  $\alpha$  zum Koordinatensystem II mit den Koordinaten  $x'$  und  $y'$  gedreht werden möge (Abb. 5.1).



**Abb. 5.1.** Drehung eines Koordinatensystems I um den Winkel  $\beta$  zum Koordinatensystem II.

Wir lesen ab:

1.  $x = a \cos \alpha$ ;
2.  $y = a \sin \alpha$ ;
3.  $x' = a \cos(\alpha - \beta) = a(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$ ;
4.  $y' = a \sin(\alpha - \beta) = a(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$ ;

was durch Einsetzen von (1) und (2)

1.  $x' = x \cos \beta + y \sin \beta$ ;

$$2. y' = -x \sin \beta + y \cos \beta$$

ergibt.<sup>1</sup> Damit werden die Drehmatrizen im zweidimensionalen

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.6.1)$$

und im dreidimensionalen

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.6.2)$$

mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (5.6.3)$$

Diese Drehmatrix ist orthonormiert: die Skalarprodukte jeder Spalte und jeder Zeile mit sich selbst ergeben Eins, die Skalarprodukte zweier verschiedener Spalten oder Zeilen verschwinden.

Die Umkehrung dieser Operation führt die Drehung zurück. Dazu stellen wir fest, daß die inverse Matrix  $D^{-1} = D^t$

$$D^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.6.4)$$

angewendet auf den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (5.6.5)$$

wieder zum Ausgangspunkt zurückführt, und wir schreiben das

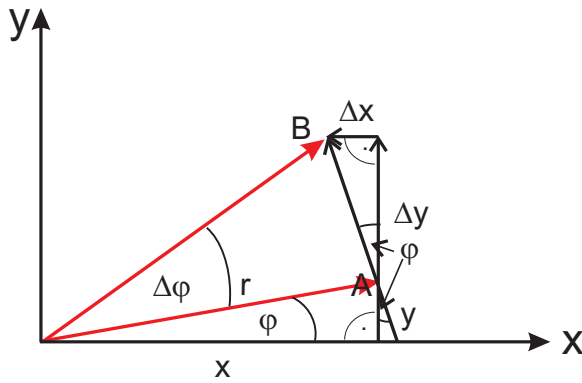
$$x_i = D_{ij}^{-1} x'_j. \quad (5.6.6)$$

**5.1.1.2 Geschwindigkeit.** Wir gehen jetzt über zur Betrachtung der Geschwindigkeit der Drehung. In der Abb. 5.2 ist der Winkel  $\Delta\varphi$  das Verhältnis der Strecken  $AB$  und  $r$ , der  $\sin \varphi$  ist das Verhältnis der Strecken  $y$  zu  $r$ , der  $\cos \varphi$  das Verhältnis der Strecken  $x$  zu  $r$ .

Wie groß sind  $\Delta x$  und  $\Delta y$ ? Die beiden Dreiecke mit den Scheitelwinkeln  $\varphi$  sind ähnlich, also gilt

---

<sup>1</sup>Da es sich immer um die Projektionen des Vektors auf die Koordinatenachsen handelt, spricht man von den Richtungskosinussen, die in der Drehmatrix zusammengefaßt sind — so handelt es sich ja bei der Projektion des Vektors  $\mathbf{a}$  auf die  $y$ -Achse um den  $\cos(90^\circ - \alpha)$ .



**Abb. 5.2.** Zur Kinematik einer zwei-dimensionalen Rotation.

$$\sin \varphi = -\Delta x / AB \Rightarrow \Delta x = AB \sin \varphi = r \Delta \varphi \cdot \frac{y}{r}. \quad (5.7.1)$$

Also wird für  $\Delta x$

$$\Delta x = -y \Delta \varphi \quad (5.7.2)$$

und für  $\Delta y$

$$\Delta y = +x \Delta \varphi. \quad (5.7.3)$$

Die (Winkel-)Geschwindigkeit  $\omega$ , mit der ein Winkelstück  $\Delta \varphi$  im Zeitraum  $\Delta t$  überstrichen wird, führt dann zur abstandsabhängigen Geschwindigkeit

$$v_x = -\omega y \wedge v_y = +\omega x, \quad (5.7.4)$$

was die Komponenten von  $v$  sind, deren Beträge

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega r \quad (5.8)$$

ergeben.

**5.1.1.3 Identifizierung von  $\omega$ .** Aus Gl. (5.3) ist zum ersten Mal ersichtlich, daß es sich bei der Kreisbewegung um eine recht komplexe Bewegung handelt, die wesentlich mit der Struktur von  $\omega$  zu tun hat, die wie ein Vektor erscheint, in Wirklichkeit aber ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe ist, der zufällig im Dreidimensionalen über drei linear unabhängige Komponenten verfügt. Die Kreuzprodukt-Bildung ist nicht-kommutativ, was wir bei der Isolation von  $\omega$  beachten. Die Gleichung

$$v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r \quad (5.9)$$

sieht in Matrixschreibweise wie folgt aus:

$$\dot{r}_i = \dot{D}_{ij} r'_j, \quad (5.10.1)$$

denn wir haben die neuen Koordinaten  $x'$  mit unserer Drehmatrix in einer bestimmten Zeit erreicht. Diese neuen Koordinaten können wir aber auch in der Basis unserer

Ausgangskoordinaten nach (5.6.6) ausdrücken (wir beschränken uns aus leicht ersichtlichen Gründen auf den zweidimensionalen Fall):

$$\dot{r}_i = \dot{D}_{ij} D_{jk}^{-1} r_k. \quad (5.10.2)$$

Das bedeutet, daß wir das Produkt der beiden Matrizen

$$\dot{D}(\varphi) = \omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.10.3)$$

und

$$D^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.10.4)$$

bilden müssen, was

$$\dot{D}D^{-1}(\varphi) = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10.5)$$

ergibt:  $\omega$  ist ein antisymmetrischer Tensor, und die Drehbewegung ist antisymmetrisch:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad (5.11)$$

oder in Matrixschreibweise für drei Dimensionen

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Da man die Matrixelemente der zu einer Drehmatrix  $D$  inversen Matrix  $D^{-1}$  durch Vertauschen der Indices, d. h. durch Vertauschen von Zeilen und Spalten, erhält, verhalten sich die drei Zahlen  $\omega_{12}, \omega_{13}$  und  $\omega_{23}$  der Drehmatrix, eines antisymmetrischen Tensors, wie die Komponenten eines dreidimensionalen Vektors.

Das äußere Produkt selbst läßt sich ebenfalls als  $3 \times 3$ -Determinante anschreiben:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}. \quad (5.13)$$

## 5.2 Energie und Trägheitsmoment

Betrachten wir zunächst die kinetische Energie der Translation, bei der definitionsgemäß sämtliche Punkte des Körpers die gleiche Geschwindigkeit haben ( $v_1 = v_2 = v_3 = v_{i-1} = v_i = v$ ):

$$E_{\text{kin}}^{\text{trans}} = T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v^2 \quad (5.14)$$

Den rotierenden Körper zerlegen wir nun in Elemente, die so klein sind, daß wir sie als Massenpunkte ansehen können, und bestimmen von diesen die Rotationsgeschwindigkeit:

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_iv_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_iv_i^2, \quad (5.15.1)$$

was wir mit der Definition der Winkelgeschwindigkeit schreiben können als

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_ir_i^2. \quad (5.15.2)$$

$\sum_i m_ir_i^2$  hängt natürlich ab von der Massenverteilung bezüglich der (aktuellen) Drehachse, und wir definieren diese Summe als *Trägheitsmoment*  $I$ :

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (5.16)$$

Wählt man als Bezugspunkt den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt des Systems, dann läßt sich die kinetische Energie eines beliebig bewegten starren Körpers darstellen als Summe der Translations- und der Rotationsenergie,

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2, \quad (5.17)$$

wobei der Index 0 auf die Achse durch den Massenmittelpunkt (Figurenachse) hinweist.

### 5.2.1 Steinerscher Satz

Sei die Drehachse nicht die Figurenachse, so ist Gl. (5.15) weiterhin gültig, beschreibt aber jetzt die Summe

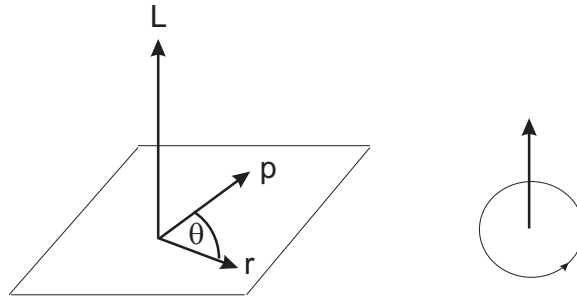
- einer translatorischen Bewegung mit der Geschwindigkeit  $v$  des Massenmittelpunktes und
- einer rotatorischen Bewegung um eine Achse, die parallel zu  $z$  ist, die durch den Massenmittelpunkt verläuft. Wenn  $a$  der Abstand des Drehpunktes von der  $z$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $v = \omega a$  sei, folgt für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(Ma^2 + I_0)\omega^2, \quad (5.18.1)$$

das Trägheitsmoment wird also auf

$$I = I_0 + Ma^2 \quad (5.18.2)$$

erhöht (STEINERScher Satz).



**Abb. 5.3.** Die drei Vektoren  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{L}$  bilden ein Rechtssystem: CCW: Schraube geht nach oben, CW: Schraube geht nach unten.

### 5.3 Drehimpuls

Der Drehimpuls eines einzelnen Massepunkts wird definiert als

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.19.1)$$

und für einen starren Körper entsprechend erweitert zu (Abb. 5.3)

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (5.19.2)$$

was man schreiben kann als

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i). \quad (5.19.3)$$

Nach dem Entwicklungssatz ist das ein Vektor, der sowohl senkrecht auf  $\mathbf{r}_i$  als auch auf der durch das Kreuzprodukt  $\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i$  gebildeten Fläche steht. Daher liegt der Produktvektor in der durch  $\boldsymbol{\omega}_i$  und  $\mathbf{r}_i$  gebildeten Fläche:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \left( \boldsymbol{\omega}_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i \underbrace{(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i)}_{=0} \right), \quad (5.19.4)$$

was einfach

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}_i = I \boldsymbol{\omega} \quad (5.19.5)$$

ergibt.

Dabei ist es üblich, sich bei der Definition des Gesamtdrehimpulses auf den Schwerpunkt zu beziehen. Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses liefert das Drehmoment  $\mathbf{M}$  (das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst ist immer Null):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \underbrace{m\mathbf{v} \times \mathbf{v}}_{=0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}, \quad (5.20)$$

und in einem abgeschlossenen System gilt der Satz von der Konstanz des Drehimpulses:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots + \mathbf{L}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{L}_i = 0. \quad (5.21)$$

*Isotropie:* Alle räumlichen Richtungen sind äquivalent; daher ändern sich die Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems nicht, wenn man es als Ganzes dreht. Die dabei geleistete Arbeit ist Null.

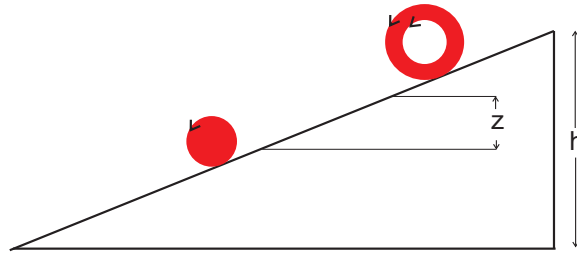
**Tabelle 5.1.** Zusammenstellung physikalischer Größen der Translation und der Rotation.

<i>Funktion</i>	<i>Translation</i>	<i>Rotation</i>
Lage	Ortsvektor $\mathbf{r}$	Drehwinkel $\varphi$
Geschwindigkeit	$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$	$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$	$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\varphi}$
Masse, Trägheitsmoment	$m$	$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$
Dreh-(Impuls)	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$
Kraft, Drehmoment	$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$ $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$
kinet. Energie	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$

**Beispiel 5.1.** Eiskunstläuferin bei der Pirouette erhöht bei konstantem Drehimpuls ihre Winkelgeschwindigkeit durch Verkleinerung des Trägheitsmomentes (Abb. 5.4).



**Abb. 5.4.** Bei konstantem Drehimpuls kann die Winkelgeschwindigkeit durch Verringerung des Trägheitsmomentes erhöht werden.



**Abb. 5.5.** Beim Abrollen einer Hohlwalze und einer Vollwalze auf einer schiefen Ebene ist die Geschwindigkeit der beiden gleich schweren Walzen verschieden und kleiner als beim freien Fall.

### 5.3.1 Bewegung im Schwerfeld

Beim Abrollen einer Walze auf einer schiefen Ebene gilt der Energiesatz:

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 + Mgz = \text{const} \quad (5.22)$$

Da es sich um ein Abrollen und kein Gleiten handelt, ist die Geschwindigkeit des jeweiligen Berührungspunktes mit der schiefen Ebene Null, und  $v$  setzt sich aus zwei Komponenten zusammen (Abb. 5.5):

- der Geschwindigkeit  $v$  der Abwärtsbewegung der Walze als Ganzes und
- einer der Bewegungsrichtung entgegengesetzte Rotation um den Walzenachse: nach oben gerichtete Geschwindigkeit des Berührungspunktes mit  $\omega r$ , so daß

$$v = V - \omega r = 0 \Rightarrow \omega = \frac{V}{r}. \quad (5.23)$$

Einsetzen von Gl. (5.23) in Gl. (5.22) ergibt bei Annahme einer Anfangsgeschwindigkeit von Null zu Beginn des Abrollens für eine bestimmte Höhe  $h$ :

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{I_0V^2}{r^2}, \quad (5.24.1)$$

$$gh = V^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{I_0}{Mr^2} \right), \quad (5.24.2)$$

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_0}{Mr^2}}}. \quad (5.24.3)$$

Die Geschwindigkeit ist also kleiner als die Geschwindigkeit des freien Falls, weil die Abnahme der potentiellen Energie  $Mgh$  nicht nur zur Vergrößerung der kinetischen Translationsenergie dient, sondern auch zur Erhöhung der kinetischen Energie der Rotation.

Anders ausgedrückt, erzeugt die Gewichtskraft ein zusätzliches Drehmoment, das die um den Faktor  $\sin \varphi$  reduzierte Erdbeschleunigung in ihren Auswirkungen auf die Beschleunigung des Gesamtkörpers weiter verringert:

$$F = ma = mg \sin \varphi - F_{\text{Rot}}, \quad (5.25)$$

$$M = F_{\text{Rot}} \times R \wedge M = I\alpha \wedge \alpha = \frac{a}{R} \wedge F_{\text{Rot}} = \frac{Ia}{R^2}, \quad (5.26)$$

$$ma = mg \sin \varphi - \frac{Ia}{R^2} \Rightarrow a \left( m + \frac{I}{R^2} \right) = mg \sin \varphi \Rightarrow a = \frac{g \sin \varphi}{1 + I/mR^2}. \quad (5.27)$$

## 5.4 Anwendungen

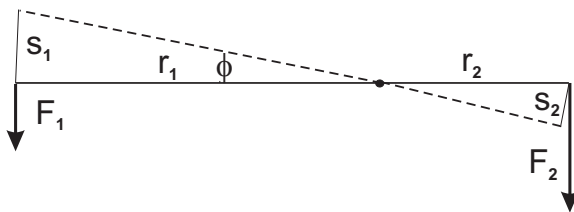
### 5.4.1 Hebelgesetz

Damit eine gewichtslose Stange, an deren Enden  $A$  und  $B$  Körper mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  befestigt sind, sich unter der Wirkung ihrer Gewichte nicht dreht, wenn sie im Schwerpunkt  $S$  zwischen  $A$  und  $B$  unterstützt wird, muß gelten:

$$m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{g} = m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{g} \Rightarrow m_1 \mathbf{r}_1 = m_2 \mathbf{r}_2. \quad (5.25)$$

$S$  wird der *Schwerpunkt* von  $m_1$  und  $m_2$  genannt (Abb. 5.6). Er teilt die Strecke  $\overline{AB}$  im umgekehrten Verhältnis der Massen:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5.26)$$



**Abb. 5.6.** Hebelgesetz: Gleichgewicht liegt vor, wenn die Drehmomente entgegengesetzt gleich sind:  $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_2$ : „Gebt mir einen Punkt, und ich hebe die Welt aus den Angeln!“ (ARCHIMEDES, etwa 220 v. Chr., † 212 v. Chr.)

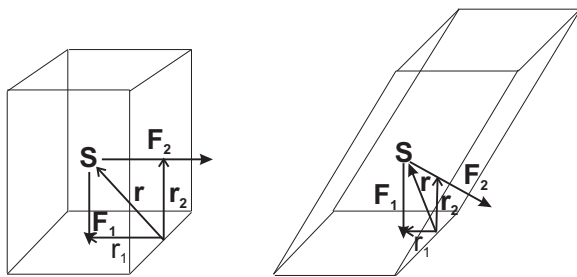
*Momenten- oder Hebelsatz:* Legt man durch den Schwerpunkt eines Körpers eine Achse, bewirken die an den einzelnen Massenteilchen angreifenden Schwerkraften in bezug auf diese Achse Drehmomente, deren Summe Null gibt. Der Körper befindet sich daher *in jeder Lage im Gleichgewicht*.

Jedes Instrument, das Kraft von einem Punkt der Erzeugung zu einem anderen verlagert, wo diese benötigt wird, wird als *Maschine* bezeichnet.<sup>2</sup> Der Hebel ist nach dieser Definition die einfachste Maschine; andere Maschinen sind die schiefe Ebene, das Rad und die Achse.

Wie aus Abb. 5.6 ersichtlich, kommt es bei der Kraftübertragung also auf die Gleichheit der Drehmomente  $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$  an. Die geleistete Arbeit bleibt wegen der Verlängerung der Wegstrecke  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  dieselbe. Die Kraft wird in der Sprache GALILEIS „verdünnt“, die Arbeit aber nicht.

### 5.4.2 Standfestigkeit

Ein Körper steht auf einer waagerechten Ebene dann stabil, wenn die Projektion seines Schwerpunktes  $S$  auf diese Ebene innerhalb seiner Grundfläche liegt (Abb. 5.7, Vergleich zwischen Quader und einem Parallelepiped). Damit das Parallelepiped z. B. durch ein Drehmoment  $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1$  seitlich weggekippt werden kann, muß dieses größer als das Schwerkraftmoment  $\mathbf{F}_2 = m\mathbf{g} \times \mathbf{r}_1$  um die gleiche Achse sein.



**Abb. 5.7.** Der Quader (lks.) steht immer stabil auf einer waagerechten Ebene. Dies gilt nicht unbedingt für das Parallelepiped. Für die Bedingung  $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1 \leq \mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_2$  kippt das Parallelepiped um.

### 5.4.3 Kreiselprobleme

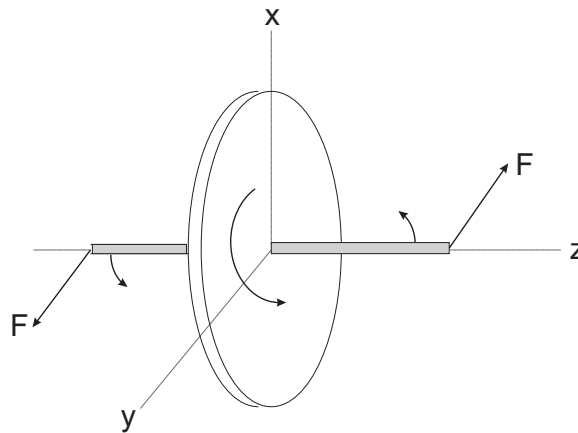
Jeder Körper hat drei Hauptträgheitsachsen (freie Achsen), auf die bei einer Drehung weder Kräfte noch Drehmomente wirken. Stabil sind die Achsen mit dem kleinsten und dem größten Trägheitsmoment (Abb. 5.8). Drehachse = Symmetrieachse.

Ein Kreisel ist ein beliebig geformter, starrer Körper, der sich dreht. Unter einem symmetrischen Kreisel versteht man einen homogenen Körper, der um eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse rotationssymmetrisch ist, die *Figurenachse*. Ist ein Kreisel in seinem Schwerpunkt unterstützt und wirkt kein Drehmoment auf ihn, bezeichnet man ihn als kräftefrei; sein Drehimpuls ist konstant.

**5.4.3.1 Präzession.** Ein sich drehender Kreisel erhält einen Kraftstoß, z. B. durch sein Eigengewicht. Beobachtet wird, daß die Drehachse senkrecht zur Kraft ausweicht.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \wedge \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{dI\boldsymbol{\omega}}{dt} : \quad (5.26)$$

<sup>2</sup>Erfindung, Gerät (lat.)



**Abb. 5.8.** Ein einfacher Kreisel zur Verdeutlichung der Richtungen von Drehimpuls und Drehmoment.

$\mathbf{L}$  steht parallel zur Drehachse ( $\parallel \boldsymbol{\omega}$ ), und die zeitliche Änderung von  $\mathbf{L}$  steht genauso senkrecht zu  $\mathbf{L}$ , wie  $\dot{\mathbf{v}}$  senkrecht auf  $\mathbf{v}$  steht. Der Betrag von  $\mathbf{L}$  kann sich nicht ändern, und die Richtungsänderung ist

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt. \quad (5.27)$$

In diesem Zeitraum ist die Projektion des Drehimpulses in dieser Ebene,  $L \sin \phi$ , um  $d\alpha$  weitergewandert. Also ist der Betrag des Drehmomentes

$$M = \frac{d\alpha}{dt} L \sin \phi, \quad (5.28)$$

woraus sich die Winkelgeschwindigkeit der Präzession zu

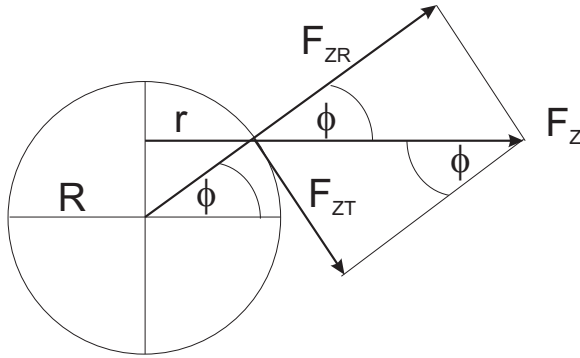
$$\omega = \frac{M}{L \sin \phi} \quad (5.29)$$

ergibt (Abb. 5.9): Ein Kreisel präzediert bei einem gegebenen Drehmoment um so langsamer, je schneller er rotiert. Wir werden im Kap. 6 darauf zurückkommen.

## 5.5 Trägheitskräfte

Zusatzkräfte, die in Bezugssystemen entstehen, die keine Inertialsysteme sind (Abschn. 3.2), werden als „Trägheitskräfte“ bezeichnet. Für sie ist charakteristisch, daß sie der Masse des Körpers proportional sind, auf den sie wirken; damit sind sie der Schwerkraft analog, bei der keine Nahwirkung erkennbar ist. Zu ihrer quantitativen Erfassung betrachtet man einmal das System von innen und einmal von außen.





**Abb. 5.10.** Korrektur der Fallbeschleunigung durch die Rotation der Erde ( $g_{\text{Pol}} = 983,2 \text{ cm/sec}^2$ ,  $g_{\text{Äquator}} = 978,0 \text{ cm/sec}^2$ ).

beide sind vom Drehzentrum weggerichtet.

- $F_Z$  hängt nicht von der Bewegung auf der Scheibe ab; sie ist folglich auch dann vorhanden, wenn das Teilchen ruht;
- $F_C$  hängt wiederum nicht von der Lage auf der Scheibe ab, wirkt aber bei einer Bewegung auf der Scheibe.

Wir werden diese beiden Kräfte an Erscheinungen auf unserer Erde studieren.

### 5.5.2 Zentrifugalkraft

Infolge der Rotation der Erde um ihre Achse greift nach dem Urteil des mitbewegten Beobachters an allen außerhalb der Achse liegenden Massenteilen eine Zentrifugalkraft  $\mathbf{F}_Z$  an. Diese beträgt für eine Masse  $m$  an der Erdoberfläche unter der geographischen Breite  $\Phi$ :

$$\mathbf{F} = m\omega^2 \mathbf{r} = m\omega^2 \mathbf{R} \cos \Phi \quad (5.31)$$

mit  $R$  dem Erdradius. Dabei ist die Radialkomponente

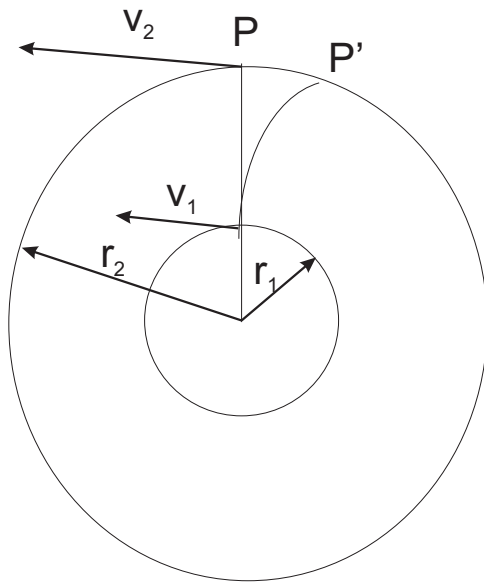
$$F_{ZR} = m\omega^2 R \cos \Phi \cos \Phi \quad (5.32.1)$$

und die Tangentialkomponente

$$F_{ZT} = m\omega^2 R \cos \Phi \sin \Phi. \quad (5.32.2)$$

An der Fallbeschleunigung, die der Radialkomponente der Zentrifugalbeschleunigung entgegengesetzt gerichtet ist, ist also eine Korrektur anzubringen (Abb. 5.10).

$\mathbf{F}_G$  ist überall gleich; am Pol ist die Zentripetalkraft Null, da durch die Pole die Drehachse der Erde verläuft. Am Äquator ist die Zentrifugalkraft am größten, weil  $\cos \Phi$  hier Eins wird. Die Zentrifugalkraft wird zu der Schwerkraft addiert, und man erhält das Gewicht  $\mathbf{G}$ :



**Abb. 5.11.** Bei der translatorischen Bewegung auf einer rotierenden Kugel entsteht die sog. CORIOLIS-Kraft.

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{g}_0 + \mathbf{F}_Z; \quad (5.33.1)$$

$$m\mathbf{g} = m(\mathbf{g}_0 - \mathbf{a}_f); \quad (5.33.2)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \mathbf{a}_f. \quad (5.33.3)$$

### 5.5.3 Corioliskraft

Wir betrachten ein Hoch auf der sich vom Nordpol gesehen CCW drehenden Erdkugel im Abstand  $r_1$  vom Drehpunkt. Dieses Hoch erfahre eine Kraft, die diesem eine Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  in radialer Richtung verleihe. Dadurch erhält das Hoch während der Bewegung nach Süden, vom mitrotierenden Beobachter gesehen, eine seitliche Ablenkung nach Osten. Vom Standpunkt des ruhenden Beobachters aus lautet die Erklärung so (Abb. 5.11): zum Durchlaufen der Strecke  $r_2 - r_1$  braucht das Hoch die Zeit

$$t = \frac{r_2 - r_1}{u}. \quad (5.34)$$

Während dieser Zeit hat sich der periphere Punkt  $P$  um die Strecke  $\omega r_2 t$  nach links bewegt. Da das Hoch auf dem Breitenkreis mit dem Radius  $r_1$  bereits die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1 = \underline{\omega} \times \mathbf{r}_1$  hatte, bewegte es sich nur bis  $P'$  um die Strecke  $\omega r_1 t$ . Die Abweichung  $\overline{PP'}$  beträgt demnach:

$$\overline{PP'} = \omega t(r_2 - r_1) = \omega \frac{(r_2 - r_1)^2}{u}. \quad (5.35)$$

Aus der Abweichung  $\overline{PP'}$  schließt der mitbewegte Beobachter auf die Einwirkung einer seitlich ablenkenden Kraft  $\mathbf{F}_C$ . Die Beschleunigung  $\mathbf{a}^*$  ist nach dem 2. NEWTONSchen Axiom

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{F}_C}{m}, \quad (5.36)$$

und die Ablenkung demnach ( $v_0 = x_0 = 0$ ):

$$\overline{PP'} = \frac{1}{2} a^* t^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_C}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_C}{m} \left( \frac{r_2 - r_1}{u} \right)^2. \quad (5.37)$$

Setzt man Gl. (5.37) in Gl. (5.35) ein, erhält man

$$C = 2mu\omega, \quad (5.38.1)$$

vektoriell

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} : \quad (5.38.2)$$

Die CORIOLIS-Kraft steht

- senkrecht zur Richtung der Drehachse und
- senkrecht zur Geschwindigkeit.

Am Äquator gibt es also nur eine radiale Komponente, die mit der Zentrifugalkraft zusammenfällt, an den Polen nur eine horizontale Komponente.

Das Hoch bleibt also durch die Wanderung nach Süden hinter der sich dort schneller drehenden Erdkugel zurück und erscheint deswegen als von Osten kommend. Auch die Erscheinung, daß auf der Nordhalbkugel das rechte Flußufer, auf der Südhalbkugel dagegen das linke Flußufer stärker unterspült sind, wurde zeitweise auf diese Kraft zurückgeführt (Gleiches wurde für Eisenbahnschienen behauptet).

**Satz 5.2** Damit in einem rotierenden System konstanter Winkelgeschwindigkeit dieselben Gesetze wie in einem Inertialsystem gelten, müssen wir die fiktiven Kräfte Zentrifugal- und CORIOLIS-Kraft einführen.

**5.5.3.1 Foucault-Pendel.** Ohne die CORIOLIS-Kraft würde die Schwingungsebene eines nahe der Erdoberfläche schwingenden Pendels relativ zur Erde unverändert bleiben. Die Wirkung dieser Kraft führt zu einer Drehung der Schwingungsebene um die Vertikale mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega \sin \varphi \quad (5.39)$$

mit  $\varphi$  der geographischen Breite des Ortes, an dem das Pendel schwingt, und  $\omega$  der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung ( $15^\circ/\text{h}$ ).

## 5.6 Arbeit bei der Kreisbewegung

$$W = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} : \quad (5.40)$$

wie wir wissen, stehen beide Größen senkrecht aufeinander. Das Skalarprodukt zweier senkrecht aufeinander stehender Größen ist jedoch Null.

## 5.7 Aufgaben und Lösungen

**Aufgabe 5.1** Ein rohes Ei unterscheidet sich vom gekochten dadurch, daß die gallertartige Einweißmasse koaguliert ist und eine feste Einheit mit der Gefäßwand bildet. Wie stellen Sie mit einem einfachen mechanischen Experiment zerstörungsfrei fest, ob ein Ei roh oder gekocht ist?

**Lösung.** Rotation um die lange Drehachse (kleines Trägheitsmoment). Das gekochte Ei rotiert als starrer Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , die im rohen Ei durch Reibungsverluste im Gallert deutlich reduziert ist.

**Aufgabe 5.2** Ein Körper rotiere um eine Achse durch den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega} = (-1, 2, 1)$ . Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt des Körpers, der gerade die Koordinaten  $(2, 0, 1)$  hat? Wie würde sich die Geschwindigkeit ändern, wenn die Drehachse so verschoben würde, daß der auf ihr liegende Ursprung nach  $(1, 1, 1)$  kommt?

**Lösung.**

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0 - 2) - \mathbf{y}(1 + 2) + \mathbf{z}(4) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega})$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0 - 1) - \mathbf{y}(0 + 1) + \mathbf{z}(2 - 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5.3** Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes, Achse senkrecht zum Stab durch sein Ende.

**Lösung.**

$$I = \int_0^x r^2 dm, \quad (1)$$

$$m = \rho Al \Rightarrow dm = \rho A dl, \quad (2)$$

$$2\rho A \int_0^x l^2 dl = \rho A \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2. \quad (3)$$

**Aufgabe 5.4** Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes, Achse senkrecht zum Stab durch seine Mitte.

**Lösung.**

$$I = 2 \int_0^{x/2} r^2 dm, \quad (1)$$

$$m = \rho Al \Rightarrow dm = \rho A dl, \quad (2)$$

$$2\rho A \int_0^{x/2} l^2 dl = \frac{2}{3} \rho A \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (3)$$

**Aufgabe 5.5** Zeigen Sie mit Hilfe des STEINERSchen Satzes, daß das Trägheitsmoment eines Stabes mit der Achse durch das Stabende viermal so groß wie dasjenige mit der Achse durch den Schwerpunkt ist!

**Lösung.**

$$I_1 = 2 \int_0^{x/2} r^2 dm; \quad (1)$$

$$m = \rho Al \Rightarrow dm = \rho A dl; \quad (2)$$

$$2\rho A \int_0^{x/2} l^2 dl = \frac{2}{3} \rho A \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (3)$$

Dazu kommt noch der Anteil vom Schwerpunkt (= Mitte) bis zum Ende:

$$I_2 = m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{m l^2}{4}, \quad (4)$$

insgesamt also

$$I = I_1 + I_2 = \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) ml^2 = \frac{1}{3} ml^2, \quad (5)$$

also dasselbe Ergebnis wie aus Aufgabe 5.2, *q. e. d.*

**Aufgabe 5.6** Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe der Dicke  $d$ , Achse senkrecht zur Fläche durch ihre Mitte.

**Lösung.**

$$I = 2 \int_0^{x/2} r^2 dm, \quad (1)$$

$$m = \rho d \pi r^2 \Rightarrow dm = \rho d 2\pi r dr, \quad (2)$$

$$2\pi d \int_0^r r^3 dr = 2\pi d \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^r = \frac{1}{2} \pi d r^4 = \frac{1}{2} m r^2. \quad (3)$$

Dieses Trägheitsmoment ist so groß wie das einer Punktmasse  $M$  im Abstand  $\frac{1}{2} r \sqrt{2} = \frac{r}{\sqrt{2}}$ .

**Aufgabe 5.7** Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe der Dicke  $d$ , Achse senkrecht zur Fläche auf dem halbem Radius.

**Lösung.**

Aufgabe 5.3 + STEINERScher Satz:

$$I_A = I_0 + M a^2 \Rightarrow I_A = I_0 + M \left( \frac{r}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} m r^2. \quad (1)$$

**Aufgabe 5.8** Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel durch ihre Figurenachse!

**Lösung.**

Differential des Trägheitsmoments der Kreisscheibe ist

$$dI = \frac{1}{2} \pi \rho r^4 dx. \quad (1)$$

Nach der Kreisgleichung ist

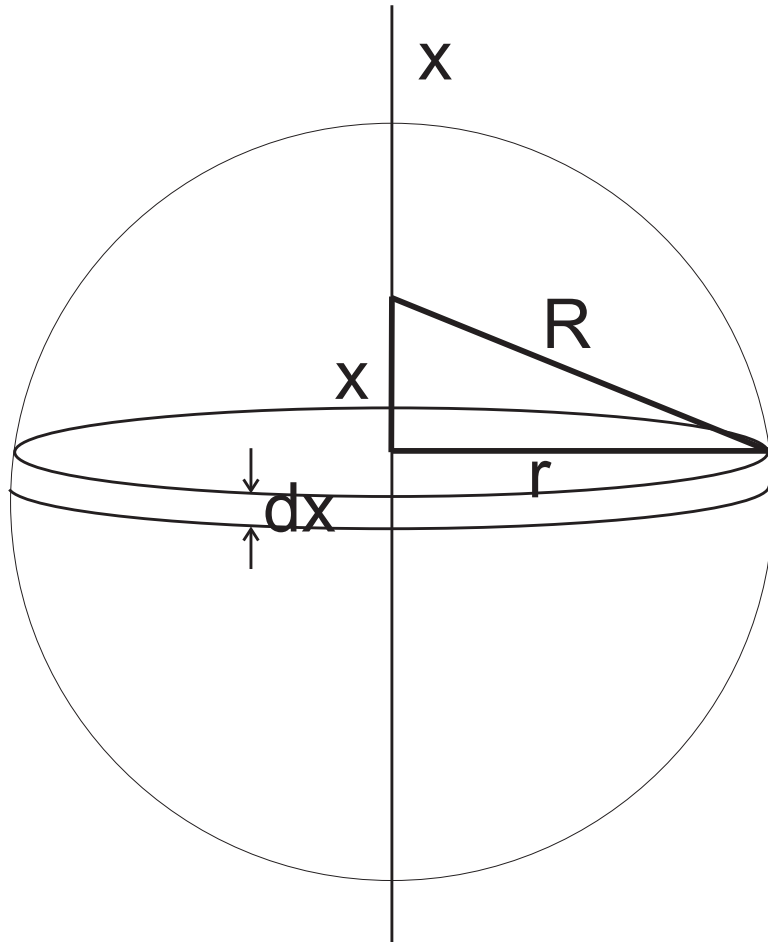


Abb. 5.12. Zur Berechnung des Trägheitsmoments einer Kugel.

$$r^2 = R^2 - x^2 \rightarrow x^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow 2x dx = -2r dr. \quad (2)$$

$$dI = \frac{1}{2} \pi \rho (R^2 - x^2)^2 dx, \quad (3)$$

$$I = 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \rho \left( R^4 \int_0^R r dr - 2R^2 \int_0^R r^2 dr + \int_0^R r^4 dr \right), \quad (4)$$

$$I = \pi \rho \left( R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right), \quad (5)$$

$$I = \pi \rho \left( \frac{15 - 10 + 3}{15} R^5 \right), \quad (6)$$

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 \cdot \frac{3}{4\pi} \frac{m}{R^3}, \quad (7)$$

$$I = \frac{2}{5}mR^2. \quad (8)$$

**Aufgabe 5.9** Berechnen Sie für eine rollende Hohlwalze mit vernachlässigbarer Wandstärke das Verhältnis von kinetischer Translationsenergie  $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$  zu kinetischer Rotationsenergie  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$  bezüglich der Figurenachse!

**Lösung.** Die Massenbelegung ist nicht homogen, sondern nur am Punkt  $r = r$  endlich. Daher ist

$$I = \int_0^r r^2 dm = mr^2. \quad (1)$$

Damit wird

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \quad (2)$$

Nach einer Umdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  hat sich die Walze um  $2\pi r$  vorwärts bewegt, woraus die Translationsgeschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (3)$$

folgt, also

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \quad (4)$$

**Aufgabe 5.10** Auf einer schiefen Ebene ( $\varphi = 30^\circ$ ) wird ein Holzkörper der Masse  $m = 10$  kg mit  $v_1 = 10$  m/sec abwärts gestoßen. Welche Geschwindigkeit hat er nach  $s = 6$  m?

**Lösung.**

$$\Delta h = s \sin \varphi = 3 \text{ m}, \quad (1)$$

$$E_{\text{pot}} = U = G\Delta h = 100 \cdot 3 \text{ N m} = 300 \text{ J}. \quad (2)$$

$$E_{\text{kin}} = T = \frac{1}{2}mv^2 = 500 \text{ J}, \quad (3)$$

$$\sum E_{\text{oben}} = 800 \text{ J}, \quad (4)$$

$$\sum E_{\text{unten}} : 800 \text{ J} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1600}{10}} = 12,6 \text{ m/sec}. \quad (5)$$

**Aufgabe 5.11** Tatsächlich ist die Gleitreibungszahl  $f = 0,3$  (Holz auf Holz). Wie groß ist die dabei verlorengelende Energie?

**Lösung.**

$$R = fN = 0,3 \cdot 100 \text{ N} \cdot \cos \varphi = 26 \text{ N} \Rightarrow W = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s} = 156 \text{ J}. \quad (1)$$

Um diese Arbeit aufzubringen, muß ein Teil der Anfangsenergie von 800 J verwendet werden:

$$E_{\text{unten}} = 800 - 156 \text{ J} = 644 \text{ J} \Rightarrow v = 11,35 \text{ m/sec}. \quad (2)$$

**Aufgabe 5.12** Wie wäre es mit einem Stahlblock auf Eis ( $f = 0,014$ )?

**Lösung.**

$$R = 0,014 \cdot 100 \text{ N} \cdot \cos \varphi = 1,2 \text{ N}, W_R = 7,3 \text{ J} \Rightarrow W = 792,7 \text{ J} \Rightarrow v = 12,6 \text{ m/sec}. \quad (1)$$

**Aufgabe 5.13** Wie, wenn der Körper eine massive Stahlkugel darstellt ( $\rho = 7,9 \text{ g/cm}^3$ ), die die Ebene hinabrollt?

**Lösung.**

$$V = \frac{M}{\rho} = 1,26 \text{ l} \wedge V = \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 6,7 \text{ cm}. \quad (1)$$

$$I_0 = \frac{2}{5} mr^2 = 4,49 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2 \quad (2)$$

$$ma = mg \sin \varphi - \frac{I a}{R^2} \Rightarrow a = \frac{g \sin \varphi}{1 + I/mR^2}. \quad (3)$$

$$a = \frac{1}{1 + 2/5} g \sin \varphi = \frac{5}{7} g \cdot 0,5 = 0,16 \text{ m/sec}^2. \quad (4)$$

$$s = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = 8,66 \text{ sec} \wedge v = at = 1,4 \text{ m/sec}. \quad (5)$$

**Aufgabe 5.14** Wie, wenn der Körper eine 20 cm lange, massive Stahlwalze darstellt, wie, wenn er einen dünnwandigen Hohlzylinder darstellt (Wandstärke 1 mm)?

**Lösung.**

$$V = \pi r^2 l \rightarrow r = \frac{1260 \text{ cm}}{\pi \cdot 20 \text{ cm}^2} = 4,48 \text{ cm.} \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \Rightarrow I = 10 \text{ kg cm}^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3} g \sin \varphi = 3,26 \text{ m/sec}^2. \quad (2)$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = 1,92 \text{ sec} \wedge v = a t = 6,25 \text{ m/sec.} \quad (3)$$

$$V = \pi(r^2 - (r - 0,1 \text{ cm})^2)l \rightarrow r = 100 \text{ cm} \quad (4)$$

$$I = m r^2 = 20 \text{ kg m}^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} g \sin \varphi = 2,445 \text{ m/sec}^2. \quad (5)$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = 2,22 \text{ sec} \wedge v = a t = 5,42 \text{ m/sec.} \quad (6)$$

**Aufgabe 5.15** Warum rutscht eine Walze (Masse  $m$ , Radius  $r$ ) eine glatte schiefe Ebene schneller herunter, als wenn sie hinunterrollt? Argumentieren Sie mit dem Energiesatz und vernachlässigen Sie Reibungsverluste (dann stimmt das Ganze nämlich nicht unbedingt) und nehmen Sie eine homogene Vollwalze an!

**Lösung.** Die potentielle Energie sei  $V$ , die beim Gleiten vollständig in die kinetische Energie  $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v_1^2$  umgewandelt wird. Rotiert sie zusätzlich, nimmt die Rotationsenergie den Wert  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} m r^2) \omega^2 = \frac{1}{4} m r^2 \omega^2$  weg. Damit gilt, da  $V$  für beide Versuche gleich ist:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{4} m v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} v_1^2.$$

**Aufgabe 5.16** Zwei äußerlich identische Kugeln gleicher Gesamtmasse unterscheiden sich in ihrem Aufbau. Die eine besteht aus einem leichten Material, ist jedoch massiv, während die zweite eine Hohlkugel ist, die aus einem Material höherer Dichte besteht. Machen Sie eine zerstörungsfreie Analyse!

**Lösung.** Schiefe Ebene. Da die Hohlkugel ein größeres Trägheitsmoment hat, entnimmt die kinetische Energie der Rotation dem Energievorrat an potentieller Energie einen größeren Anteil. Daher rollt die Hohlkugel langsamer.

**Aufgabe 5.17** Auf eine ideal geschmierte Tür vom Trägheitsmoment  $I = 16 \text{ kgm}^2$  wirkt rechtwinklig mit 80 cm Hebelarm die Kraft  $F = 40 \text{ N}$ .

- Welche Winkelbeschleunigung erteilt sie?
- Welche Winkelgeschwindigkeit hat die Tür nach 1 sec?
- Um welchen Winkel hat sie sich dann gedreht (in Grad, in Bogenmaß)?
- Nach welcher Zeit hat sie sich um  $90^\circ$  aus der Ruhe heraus gedreht?

**Lösung.**

$$M = F \times r = 40 \cdot 0,8 \text{ kg m}^2 \text{ sec}^{-2}.$$

$$\alpha = \frac{32}{16} = 2 \text{ rad sec}^{-2}.$$

$$\omega = \alpha \cdot t = \frac{2 \text{ rad}}{\text{sec}}.$$

$$\phi = \omega \cdot t = 2 \text{ rad} \vee 114^\circ.$$

$$90^\circ = \omega \cdot x \text{ sec} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\text{sec}}{2} = 0,79 \text{ sec}.$$

# 6 Himmelsmechanik

## 6.1 Keplersche Gesetze und Gravitationsgesetz

- Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
- Der von der Sonne zu einem Planeten gezogene Radiusvektor (Fahrstrahl) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Abb. 6.1).
- Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

### 6.1.1 2. Keplersches Gesetz

Das 2. KEPLERSCHE Gesetz ist eine andere Formulierung der Konstanz des Drehimpulses ( $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ ):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 : \quad (6.1)$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} - m\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{r}} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{r}}) = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}. \quad (6.2)$$

Der letzte Term ist wieder das (unverändert gebliebene) Drehmoment:

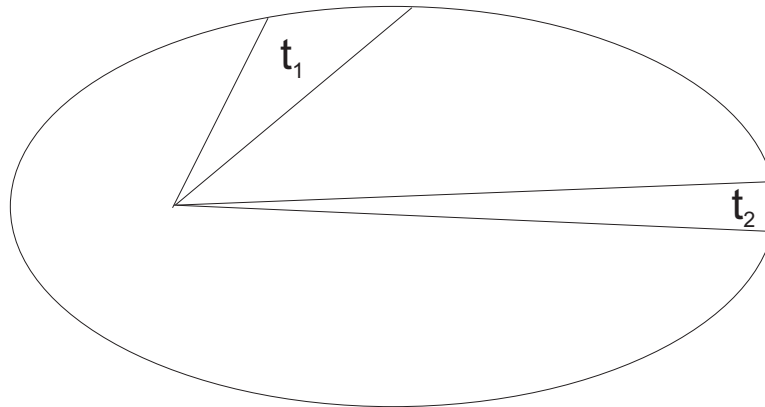
$$m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}. \quad (6.3)$$

Da bei den Planeten die Bewegung unter dem Einfluß einer Zentralkraft erfolgt, verschwindet das Drehmoment  $\mathbf{M}$ , weil die Zentralkraft in Richtung des Vektors  $\mathbf{r}$  wirkt, so daß

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} = 0. \quad (6.4)$$

Aus Gl. (6.2) geht weiter hervor, daß

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0 : \quad (6.5)$$



**Abb. 6.1.** Die Bewegung eines Planeten um sein Zentralgestirn ist nicht immer gleich schnell. Nach dem 2. KEPLERSchen Gesetz beschreibt der in gleichen Zeiten ( $t_1 = t_2$ ) zurückgelegte Fahrstrahl gleich große Flächen.

Der Vektor in der großen runden Klammer ist konstant in Betrag *und* Richtung, damit verläuft die Bewegung eines Massepunktes unter dem Einfluß einer Zentralkraft stets in einer Ebene.

Nach dem 2. KEPLERSchen Gesetz bewegt sich die Erde im Aphel (erdfernster Punkt) also langsamer als im Perihel (erdnächster Punkt). Da im Sommerhalbjahr der Perihel erreicht wird, dauert die warme Jahreszeit also auf der Nordhalbkugel etwas länger als die kalte Jahreszeit.

Aus den KEPLERSchen Gesetzen kann man das Gravitationsgesetz herleiten:

$$\mathbf{F}_Z + \mathbf{F}_R = 0, \quad (6.6)$$

wobei der erste Term die Zentripetalkraft und der zweite Term die Trägheitskraft in Form der Zentrifugalkraft sind.

$$\mathbf{F}_Z = m\mathbf{r}\omega^2 = m\mathbf{r} \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (6.7)$$

Nach dem 3. KEPLERSchen Gesetz ist aber

$$T^2 = ba^3 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{ba^3}. \quad (6.8)$$

Ist die Ellipse zu einem Kreis entartet, ist  $a = r$ :

$$\omega^2 = \frac{1}{br^3} \quad (6.9.1)$$

oder

$$\omega^2 r = \frac{1}{br^2} : \quad (6.9.2)$$

die Zentrifugalkraft ist also dem Kehrwert des Quadrates des Abstandes proportional. Wenn also der Kraftbegriff zur Zeit KEPLERS schon existiert hätte, hätte er diese Proportionalität zum Gravitationsgesetz zweifellos gefunden:

$$\mathbf{F}_Z = m\mathbf{r} \frac{4\pi^2}{br^3} \Rightarrow |\mathbf{F}_Z| = \frac{4\pi^2}{b} \frac{m}{r^2} \quad (6.9.3)$$

Die Zentralkraft  $\mathbf{F}_Z$ , die als Zentripetalkraft am Körper der Masse  $m$  auf das Zentrum hin angreift, ist der Masse  $m$  direkt und dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional. Nach dem Gesetz von D'ALEMBERT zieht der Körper der Masse  $m$  auch den Körper  $M$  mit der gleich großen Kraft  $\mathbf{F}_Z$  an:

$$\mathbf{F} \propto Mm \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow \mathbf{F} = \gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6.10)$$

Im MKSA-System hat  $\gamma$  den Wert  $6,670 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg sec}^2$ .

**Beispiel 6.1** Ein Stein fällt aus einer Höhe von 100 m auf die Erde. Er wird von der Erde angezogen, von Westen und von Osten, von Norden und von Süden, vom Gebiet direkt unter ihm bis zum Gebiet, das unsere Antipoden bewohnen. Es ist evident, daß sich diese Kräfte alle ausgleichen. Der einzige Punkt, bei dem dies nicht möglich ist, ist der Erdmittelpunkt.

Die Gravitationswirkung einer Kugel auf einen Körper außerhalb von ihr ist so, als ob ihre gesamte Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt sei. Diese Beobachtung ermöglicht etwa die Bestimmung der Erdmasse aus der Gravitationskonstanten  $\gamma$ :

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow \frac{F}{m} = g = \frac{\gamma M}{r^2} \Rightarrow M = \frac{g}{\gamma} r^2 \Rightarrow M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}. \quad (6.11.1)$$

Für die mittlere Dichte ergibt sich

$$\rho = 5,6 \text{ g/cm}^3. \quad (6.11.2)$$

### 6.1.2 Gravitationsfeld

Aus Gl. (6.10)

$$\mathbf{F} \propto Mm \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow \mathbf{F} = \gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6.10)$$

gewinnen wir einen Ausdruck für die Feldstärke der Masse  $M$ , die auf die Probemasse  $m$  wirkt, und die an der Erdoberfläche bekanntlich die Größe von  $9,81 \text{ m/sec}^2$  hat.

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6.12)$$

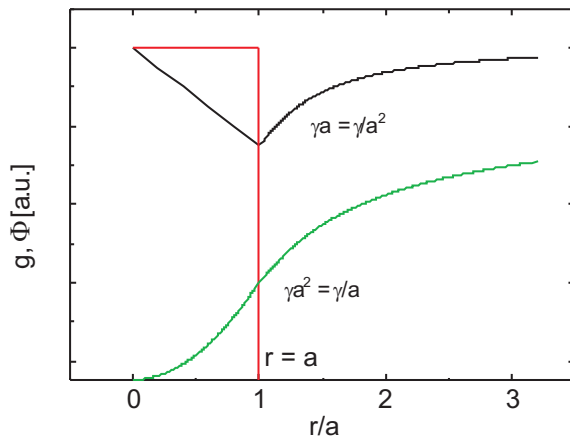
Wie sieht jetzt das Feld innerhalb der Erdkugel aus? Dieses hängt natürlich von der Dichteverteilung  $\rho(r)$  ab; die Gesamtmasse ist

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho, \quad (6.13)$$

und bei homogener Dichte ist die Feldstärke damit

$$\mathbf{g} = \gamma \frac{4\pi}{3} \frac{r^3}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \propto \rho r \frac{\mathbf{r}}{r} : \quad (6.14)$$

Sie nimmt kontinuierlich von 0 im Erdmittelpunkt auf den Maximalwert von 9,81 m/sec<sup>2</sup> an der Erdoberfläche zu. Daraus folgt eine parabolische Abhängigkeit des Potentials (Abb. 6.2).



**Abb. 6.2.** Abhängigkeit von Gravitationspotential und Feldstärke innerhalb einer homogenen Kugel und außerhalb von ihr. Bei  $r = a$  wird die Kugeloberfläche erreicht.

## 6.2 Ebbe und Flut

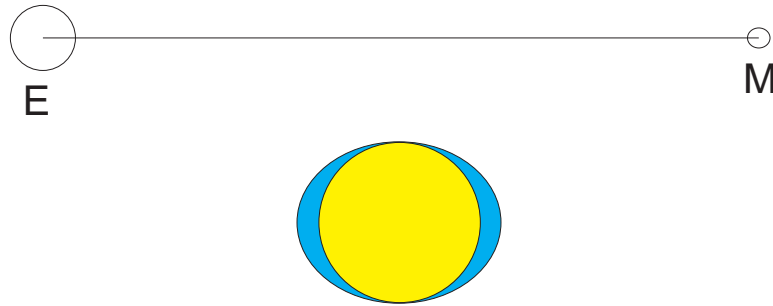
werden verursacht durch die Gravitationskräfte von Sonne und Mond, die sich der Zentrifugalkraft überlagern. Die des Mondes sind um den Faktor 2,4 größer und werden daher hier als einzige Ursache besprochen. Weitere Annahme: der Schwerpunkt des Systems Erde/Mond fällt mit dem Erdmittelpunkt zusammen (in Wirklichkeit liegt er im äußeren Erdkern).

Erdseite, die dem Mond zugewandt ist (Abb. 6.3) ( $d$ : Abstand Erde-Mond,  $r$ : Erdradius,  $m_M$ : Masse des Mondes,  $m_E$ : Masse der Erde):

$$\Delta a = \gamma \left( \frac{m_M}{(d-r)^2} - \frac{m_M}{d^2} \right) = \gamma \frac{m_M}{d^2} \frac{d^2 - r^2 + 2dr - d^2}{(d-r)^2} \approx \frac{2\gamma m_M r}{d^3}. \quad (6.15.1)$$

Die Differenzbeschleunigung zieht die Dinge (das Wasser) zum Mond, sie fallen „nach außen“.

Erdseite, die dem Mond abgewandt ist:



**Abb. 6.3.** Ebbe und Flut. Erde und Mond drehen sich um einen gemeinsamen Schwerpunkt, der noch innerhalb der Erde liegt. Der Abstand  $d$  Erde-Mond beträgt 60 Erdradien  $r$ . Es entstehen zwei Flutberge, die durch den mangelhaften Ausgleich der Zentripetalkraft entstehen.

$$\Delta a = \gamma \left( \frac{m_M}{(r+d)^2} - \frac{m_M}{d^2} \right) \approx -\gamma \frac{m_M}{d^2} \frac{2rd}{(r+d)^2}. \quad (6.15.2)$$

Damit wird  $\Delta a$  negativ:

$$\Delta a = -\frac{2\gamma m_M r}{d^3}. \quad (6.15.3)$$

Die Differenzbeschleunigung ist negativ, damit wird auf dem mondfernen Seite die Zentrifugalkraft nicht ausgeglichen, die Dinge fallen ebenfalls „nach außen“.

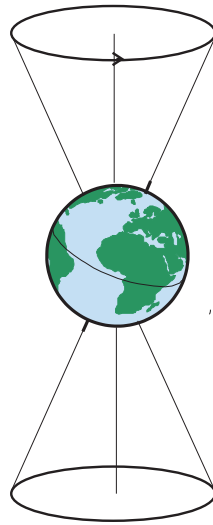
### 6.3 Der Präzessionszyklus der Erde

Nicht nur das Wasser, sondern die gesamte Erde ist den Gezeitenkräften von Sonne und Mond ausgesetzt. Wegen der Starrheit des festen Gesteins sind die Auswirkungen allerdings zu gering, um beobachtet werden zu können. Nur, weil das Wasser fluider ist, also sich anders als die festen Landmassen verhält, können wir das Spiel von Ebbe und Flut überhaupt beobachten.

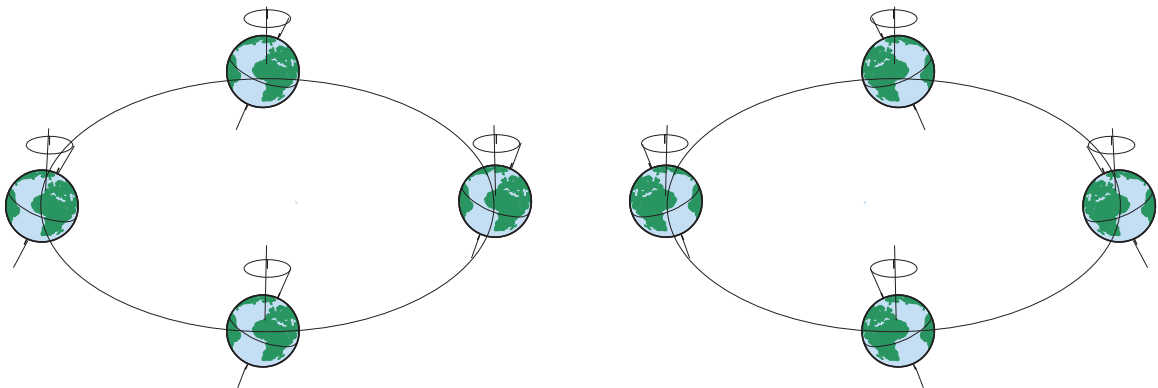
Der Erdkreis ist um  $23,4^\circ$  gegenüber der Ekliptik geneigt (Abb. 6.3). Wie beeinflusst das durch Mond und Sonne ausgeübte Drehmoment den Drehimpuls der Erde? Die Sonne zieht die Erde als Ganzes an, wobei die sonnennahen Teile der Erde eine größere, die sonnenfernen Teile eine kleinere Kraft erfahren. Da in der Äquatorialebene eine höhere Masse wegen des Äquatorwulstes angesammelt ist, soll diese Ebene in die Revolutionsebene der Erdbahn gestellt werden. Diese Differenzkraft versucht damit, die zur Ekliptik schiefstehende Drehachse aufzurichten. Daher weicht die Erdachse dieser Kraft mit einer Präzessionsbewegung senkrecht aus. Welche Präzessionsfrequenz ergibt sich? Nach der Gleichung

$$\omega = \frac{M}{L \sin \varphi} = \frac{M}{L \sin 23,4^\circ} \quad (6.16)$$

können wir den Drehimpuls und das Drehmoment errechnen.



**Abb. 6.4.** Die Erdatmosphäre vollführt im Laufe der Jahrtausende eine Präzessionsbewegung unter Einfluß von Sonne und Mond. Die Erdatmosphäre beschreibt dabei einen Kegelmantel um die Senkrechte der Ebene der Erdbahn.



**Abb. 6.5.** Infolge der Präzession verändert sich die Stellung der Erdatmosphäre zur Erdbahn. Dargestellt sind zwei Situationen, die etwa 13000 Jahre auseinander liegen. Auf Grund der Präzession wandern die Sternzeichen etwa alle 2150 Jahre ein Zeichen zurück. Wenn also gesagt wird: „Die Sonne befindet sich im Widder,“ ist sie in Wirklichkeit in den Fischen (genauer: bereits am Ende der Fische), und wird im nächsten Jahrhundert bereits im Wassermann aufgehen.

- Drehimpuls der Erd„kugel“: Trägheitsmoment einer homogenen Kugel:  $I = \frac{2}{5}mR^2$ . Da die Erddichte im Kern (innerer und äußerer) deutlich höher ist als in Erdmantel und -kruste, kommt ein Abschwächungsfaktor von 0,7 davor:

$$L = 0,28 \cdot m_{\text{Erde}} R^2 \omega_{\text{Tag}}. \quad (6.17)$$

- Drehmoment auf den Äquatorwulst: Der Äquatorwulst enthielte bei homogener Dichteverteilung der Erde etwa ( $a, b$ : Halbachsen des Rotationsellipsoides)

$$\frac{a^2 b - b^3}{b^3} \cdot m_{\text{Erde}} \approx 2 \frac{a - b}{b} \cdot m_{\text{Erde}} \approx \frac{1}{150} \cdot m_{\text{Erde}}; \quad (6.18)$$

an der Oberfläche ist die Dichte jedoch nur halb so hoch wie die mittlere Dichte, also wirkt die Gezeitenkraft auf  $\frac{1}{300} \cdot m_{\text{Erde}}$ . Damit wäre das Drehmoment bei ganz auf der Sonne zugewandter Masse ( $R$ : mittlerer Radius der Erde, 6400 km)

$$M = FR \sin \varphi = \frac{mv^2 R}{a} R \sin \varphi \Rightarrow \quad (6.19.1)$$

$$M = \frac{mv^2 R^2 \sin 23,4^\circ}{a^2}, \quad (6.19.2)$$

da die Masse gleichmäßig verschmiert ist, wird das Drehmoment um den Faktor  $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$  reduziert:

$$M = \frac{1}{2} \frac{mv^2 R^2 \sin 23,4^\circ}{a^2}, \quad (6.19.3)$$

damit

$$\omega = 1,2 \cdot \frac{m_{\text{Wulst}}}{m_{\text{Erde}}} \cdot \frac{v_{\text{Erdbahn}}^2 R}{v_{\text{Erdrotation}} a^2} = 0,004 \cdot \frac{v}{a} \cdot \frac{R}{v_{\text{Erde}}} \cdot \frac{v}{a} \quad (6.20.1)$$

damit also

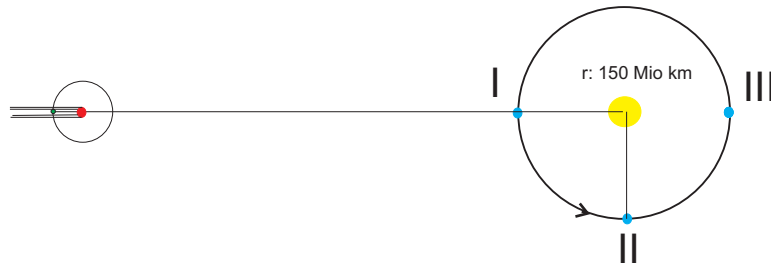
$$\omega = \frac{1}{250} \frac{\omega_{\text{Jahr}}}{\omega_{\text{Tag}}} \cdot \omega_{\text{Jahr}} \quad (6.20.2)$$

was etwa 90 000 Jahre, nämlich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 250 \cdot 365 \text{ Jahre} \quad (6.20.3)$$

ausmachen würde. Da die Mondzeiten um einen Faktor 2,4 stärker sind als die Sonnenzeiten, verkürzt sich die Periode auf

$$T = \frac{1}{1 + 2,4} 90\,000 \text{ Jahre} \approx 27\,000 \text{ Jahre}. \quad (6.20.4)$$



**Abb. 6.6.** Aus den verschiedenen Positionen des Systems Sonne/Erde (re.) und Jupiter/Ganymed (lks.) bestimmte OLAF RÖMER die Lichtgeschwindigkeit. Stellung I: sog. Opposition, die Erde ist hier um  $2r = 2 \cdot 150 \text{ Mio km}$  dichter am Geschehen des Jupitersystems als in Stellung III, Stellung II liegt dazwischen.

Damit ändert sich die Stellung der Sonne zum Fixsternhimmel. Von der Erde aus beobachtet man ein kolbenförmiges Auf- und Niedergehen bzw. totales Verschwinden einzelner Sterne bzw. Sternbilder während dieses Zyklus. Damit verändern aber auch die Jahreszeiten kontinuierlich ihren Beginn und ihr Ende (s. Abbn. 6.4 und 6.5).

Dieses Phänomen, das Vorrücken der Äquinoktien oder des Frühlingspunktes, war sowohl den Ägyptern wie den Griechen bekannt, nicht jedoch JULIUS CÆSAR, der seinen Kalender ausschließlich nach Sonne und Mond konzipieren ließ. So kam es in der römischen Kirche zu der GREGORIANISCHEN Kalenderreform im Jahre 1582: Papst GREGOR XIII strich ersatzlos 10 Tage und führte den heutigen Kalender ein, in der richtigen Annahme, daß den (intelligenten?) Erdbewohnern der unveränderte Beginn des Weihnachtsfestes wesentlich wichtiger wäre als die kontinuierliche Datumsverschiebung des Frühlingspunktes;<sup>1</sup> am unteren Ende des Präzessionszyklus, etwa 10 000 v. Chr., lag der Frühlingspunkt im Sternbilde des Löwen, am oberen Ende des Präzessionszyklus, in etwa 200 Jahren, wird er zwischen Fischen und Wassermann sein.<sup>2</sup>

## 6.4 Lichtgeschwindigkeit

GALILEI fand nicht nur die ersten vier Jupitermonde, er empfahl auch deren Verwendung als *astronomische Uhr*. OLAF RÖMER machte sich 1676 an die Arbeit und fand phantastische Umlaufperioden, festgestellt durch Ein- oder Austritt in den bzw. aus dem Jupiterschatten (Abb. 6.6), z. B. von Ganymed  $42\frac{1}{2}$  Stunden.

In Stellung III trat die Verfinsterung erst 16 min 40 sec später ein als in

<sup>1</sup>Zum Konzil von Nicæa war das der 21. März; 1582 war der Frühlingspunkt aber bereits eben diese zehn Tage früher erreicht.

<sup>2</sup>Die Umsetzung geschah nicht überall 1582. Das Vereinigte Königreich strich bei der Einführung des GREGORIANISCHEN Kalender diese Tage erst 1752 (dem 02. Sept. folgte der 14. Sept.), und das Zarenreich blieb bis zu seinem Ende beim Julianischen Kalender (November- bzw. Oktober-Revolution).

Stellung I. Das Licht benötigt also zum Durchlaufen der Strecke 300 Mio km 1000 sec, damit wird

$$c = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ km}}{1000 \text{ sec}} = 300000 \text{ km/sec.} \quad (6.21)$$

## 6.5 Aufgaben und Lösungen

**Aufgabe 6.1** Mit welcher Kraft zieht die Erde 1 kg Mondmaterial an ( $d = 60$  Erdradien, 1 Monat = 27,3 Tage)?

**Lösung.**

$$F = ma = m\omega^2 d = m \frac{4\pi^2}{(27,3 \cdot 86400)^2} \cdot 60 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 2,72 \text{ mN.} \quad (1)$$

**Aufgabe 6.2** Bestimmen Sie aus der Erdbeschleunigung ( $10 \text{ m/sec}^2$ ), dem Erdradius ( $r = 6370 \text{ km}$ ) und der Entfernung Erde-Mond ( $380\,000 \text{ km}$ ) die Beschleunigung der Erde auf den Mond! Geben Sie die Potenz an, mit der die Schwerebeschleunigung vom Abstand abhängt!

**Lösung.**

$$\frac{380\,000}{6370} \approx 60. \quad (1)$$

Im Abstand von 60 Erdradien ist also die Schwere- gleich der Zentripetalbeschleunigung:

$$a = vr = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = 2,73 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad (2)$$

mit  $T = 27,3$  Tagen oder  $2,36 \cdot 10^7 \text{ sec}$ . Die Beschleunigung ist also nach 60 Erdradien um den Faktor 3600 geschwächt, also ist die Schwerebeschleunigung proportional  $1/r^2$ .

**Aufgabe 6.3** Bestimmen Sie das Gewicht eines Mannes, der auf der Erde  $m_1 = 90 \text{ kg}$  „auf die Waage“ bringt, auf dem Jupiter (Jupitermasse: 318 Erdmassen, Jupiter-radius:  $71\,350 \text{ km}$ , Erdradius  $r_1: 6370 \text{ km}$ )!

**Lösung.**

$$F_{\text{grav,Erde}} = m_1 \cdot g = \gamma \frac{m_1 \cdot m_{\text{Erde}}}{r_1^2}. \quad (1)$$

$$F_{\text{grav,Jupiter}} = m_1 \cdot a_{\text{Jupiter}} = \gamma \frac{m_1 \cdot 318 \cdot m_{\text{Erde}}}{11,2 \cdot r_1^2}. \quad (2)$$

$$\frac{a_{\text{Jupiter}}}{g} = \frac{1}{\frac{318}{11,2^2}} = 2,53 \cdot 90 = 227,7 \text{ kp.} \quad (3)$$

**Aufgabe 6.4** Wie hoch muß die Geschwindigkeit eines sich im Erd-Orbit befindlichen Körpers sein, damit der Eindruck der Schwerelosigkeit herrscht ( $r_{\text{Erde}} = 6370 \text{ km}$ )?

**Lösung.**

$$F_Z = F_G. \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{r} = mg. \quad (2)$$

$$v = \sqrt{g \cdot r}. \quad (3)$$

$$v = \sqrt{9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (4)$$

$$v = 7,91 \text{ km/sec} \vee 28\,500 \text{ km/h.} \quad (5)$$

**Aufgabe 6.5** Bestimmen Sie aus Abstand Mond-Erde ( $d = 384000 \text{ km}$ ) und der Dauer eines Mondumlaufs (27,3 Tage) die Erdmasse und die mittlere Dichte (Radius: 6370 km)!

**Lösung.**

$$F_Z = F_G \Rightarrow \frac{(2\pi)^2 m_M r}{T^2} = \gamma \frac{m_M m_E}{r^2} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg.} \quad (1)$$

$$\rho = \frac{m}{\frac{4\pi r^3}{3}} = 5,5 \text{ g/cm}^3. \quad (2)$$

**Aufgabe 6.6** Wie erklären Sie die Höhe von 36 000 km für einen geostationären Satelliten?

**Lösung.**

- Eine stabile Bahn ist dadurch ausgezeichnet, daß

$$F_Z = m \omega^2 r \wedge F_{\text{Grav}} = \gamma \frac{m M}{r^2},$$

- während die stationäre Bahn dadurch ausgezeichnet ist, daß die Winkelgeschwindigkeit des Satelliten  $\omega_S$  und der Erde  $\omega_E$  gleich sind.

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}, \quad (1)$$

$$r = \sqrt[3]{\gamma \frac{M}{\omega^2}} = 42\,300 \text{ km} \quad (2)$$

vom Erdmittelpunkt oder 36 000 km vom Meeresspiegel.

**Aufgabe 6.7** Für das Zentralfeldproblem (z. B. Satellit (Mond) und die Erde) gilt der Virialsatz, nach dem die kinetische Energie gleich der Hälfte der potentiellen Energie ist:  $T = -1/2 V$ . Beim Eintauchen in die höheren Schichten der Erdatmosphäre verliert nun ein Satellit zweifellos Energie, dennoch nimmt seine Umlaufzeit ab, also zumindest seine Winkelgeschwindigkeit zu. Erklären Sie das mit dem 3. KEPLERSchen Gesetz!

**Lösung.** Der Virialsatz lautet:

$$E = T + V = 1/2 V - V = -1/2 V = -T, \quad (1)$$

die Gesamtenergie wird also weniger negativ, und für ein mechanisch stabiles System ist nach KEPLER

$$m\omega^2 r = \gamma M m r^{-2} \Rightarrow \omega^2 = r^{-3} : \quad (2)$$

Nimmt der Umlaufradius allmählich ab, steigt  $\omega$ , ja, sogar die Bahngeschwindigkeit nimmt etwa zu:

$$m\omega^2 r = \gamma M m r^{-2} \Rightarrow \omega^2 r^2 = \frac{\gamma M}{r} \Rightarrow v \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \wedge \omega \propto \frac{1}{\sqrt{r^3}} : \quad (3)$$

Die Bremsung entzieht dem Satelliten Energie, auf Grund der zunehmenden Schwerkraft dagegen gewinnt er dagegen mehr, als er verliert.

**Aufgabe 6.8** Wie groß ist die Gezeitenbeschleunigung im Verhältnis zur Erdbeschleunigung?

**Lösung.**  $m_M$ : Masse des Mondes;  $m_E$ : Masse der Erde,  $r_E$ : Erdradius,  $d$ : Abstand zwischen Erde und Mond.

$$\frac{a}{g} = \frac{2\gamma m_M r_E d^{-3}}{\gamma m_E r_E^{-2}} = 2 \frac{m_M}{m_E} \cdot \frac{r_E^3}{d^3}, \quad (1)$$

also etwa  $10^{-7} g$ .

**Aufgabe 6.9** Wie hoch sind die Einflüsse von Mond und Sonne auf Ebbe und Flut (Massenverhältnis Mond/Erde  $\approx 1/80$ , Sonne/Erde  $\approx 330\,000$ , Abstand Mond/Erde: 384 000 km, Abstand Sonne/Erde 150 Mio km)?

**Lösung.** Da die Gezeitenkräfte sich wie  $m/d^3$  verhalten, wird die Beschleunigung durch den Mond etwa das 2,4-fache des Sonnenwertes sein. Bei Halbmond sind die Flutberge schwächer als bei Neu- oder Vollmond (Sonne und Mond im Winkel von  $90^\circ$  oder in Opposition oder hintereinander).

**Aufgabe 6.10** Die Gezeitenreibung verlängert die Tage ad infinitum? Wie lang wird der Erdentag sein, wenn er so lang ist wie ein Monat? Wie weit ist der Mond dann von der Erde entfernt?  $d_{\text{Mond}} : 384\,000$  km,  $m_{\text{Mond}} : 0,73 \cdot 10^{23}$  kg,  $\omega_{\text{Mond}} = 2,7 \cdot 10^{-6}$  sec $^{-1}$ .

**Lösung.** Die Abbremsung der Erdrotation findet durch das ewige Anlaufen des Ozeanwassers an die Küsten der Kontinente statt. Da das System Erde/Mond ein Ganzes ist, kann der Verlust an Drehimpuls der Erde nur beim Verursacher wiederzufinden sein:

$$\sum_i L_i = I_{\text{Erde}}\omega_{\text{Erde}} + m_{\text{Mond}}d_{\text{Mond}}^2\omega_{\text{Mond}} = \text{const.} \quad (1)$$

Irgendwann ist, wenn

$$\omega_{\text{Erde}} = \omega_{\text{Mond}} = \omega_{\text{juengster Tag}} = \omega_{\infty}. \quad (3)$$

Wie groß sind jetzt die einzelnen Größen?

- Bei homogener Dichte wäre das Trägheitsmoment  $I_{\text{Erde}} = 2/5m_{\text{Erde}}r_{\text{Erde}}^2 = 10^{38}$  kg m $^2$ . Da der Erdkern dichter ist als Mantel und Erdkruste, ist das Trägheitsmoment 20 % geringer:
- $L_{\text{Erde}} : 5,64 \cdot 10^{33}$  kg m $^2$  sec $^{-1}$ ,
- $L_{\text{Mond}} : 2,9 \cdot 10^{34}$  kg m $^2$  sec $^{-1}$ ,
- $\sum L = 3,6 \cdot 10^{34}$  kg m $^2$  sec $^{-1}$ .

Das heißt, bereits heute hat die Erde nur noch 16 % des Gesamtdrehimpulses! Im Endstadium ist dann

$$\sum_i L_i = \underbrace{I_{\text{Erde}}\omega_{\text{Erde}}}_{\approx 0} + m_{\text{Mond}}d_{\text{Mond}}^2\omega_{\text{Mond}} = 3,6 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ sec}^{-1} = \text{const}, \quad (4)$$

was man nach  $\omega_{\text{Mond}}$  oder  $d_{\text{Mond}}$  auflösen kann. Einsetzen in das 3. KEPLERSche Gesetz ergibt dann (1: heute,  $\infty$ : irgendwann,  $T^2/d^3 = 9,82 \cdot 10^{-14}$  sec $^2$ /m $^3$  für das System Erde/Mond):

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_\infty^2} = \frac{d_\infty^3}{d_1^3} \Rightarrow \omega_1^2 d_1^3 = \omega_\infty^2 d_\infty^3 \quad (5)$$

$$\omega_\infty = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1} \Rightarrow T = 56 \text{ Tage}; \quad (6)$$

$$d_\infty^2 = \frac{L}{m_{\text{Mond}} \omega_{\text{Mond}}}. \quad (7)$$

$$d_\infty = 6,2 \cdot 10^8 \text{ m} = 1,56 \cdot d_1. \quad (8)$$

**Aufgabe 6.11** Bestimmen Sie das Verhältnis von Sonnen- und Erdmasse aus den Umlaufzeiten der Erde um die Sonne ( $r = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ ) und des Mondes um die Erde ( $r = 384000 \text{ km}$ ) aus dem 3. KEPLERSchen Gesetz, außerdem mit dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz ohne  $\gamma$ ! Gehen Sie dabei von Kreisbahnen aus!

**Lösung.** Die Sonne zwingt die Erde, die Erde den Mond auf eine Kreisbahn. Das Verhältnis der Radien ist 400, das Verhältnis der Umlaufzeiten etwa 13. Nach dem 3. KEPLERSchen Gesetz und dem Gravitationsgesetz ist

$$\gamma \frac{m_E M_S}{(400 r)^2} = m_E \cdot 400 r \left( \frac{2\pi}{13 T} \right)^2. \quad (1)$$

$$\gamma \frac{m_M M_E}{r^2} = m_M \cdot r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (2)$$

Es bleiben also die Massen der Zentralkörper stehen:

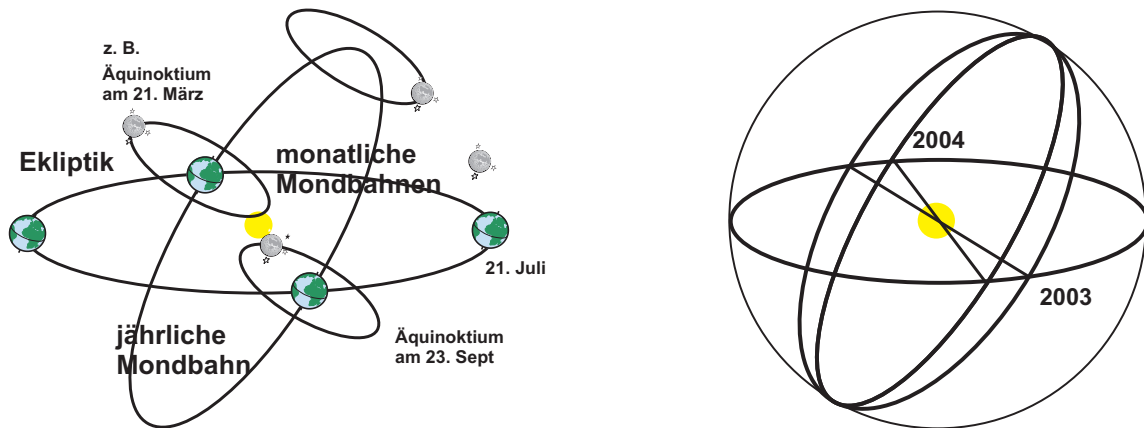
$$\gamma \frac{M_S}{(400 r)^2} = 400 r \left( \frac{2\pi}{13 T} \right)^2, \quad (3)$$

$$\gamma \frac{M_E}{r^2} = r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2, \quad (4)$$

woraus wir bereits das 3. KEPLERSche Gesetz erkennen. Auflösen nach den Massen und Division der beiden Gleichungen liefert

$$\frac{M_S}{m_E} = \left( \frac{400 r}{r} \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{13} \right)^2 = \frac{400^3}{13^2} = 3,8 \cdot 10^5. \quad (5)$$

**Aufgabe 6.12** Als JOSUA sah, daß sich das Schlachtenglück zu seinen Gunsten wandte, befahl er der Sonne, stillzustehen. Das soll nach Meinung einiger SF-Phantasten durch eine Annäherung der Venus auf Mondnähe ( $d = 60 \text{ Erdradien}$ ) möglich gewesen sein. Schätzen sie die Höhe der Flutwelle ab (Venusmasse = 0,8 Erdmassen oder 64 Mondmassen, mittlere Höhe der Weltmeere bei gleichmäßiger Wasserdicke etwa 4 km, mittlere Höhe des Mondflutberges: 60 cm).



**Abb. 6.7.** SAROS-Zyklus. Lks.: Der Mondkreisel ist um  $5^\circ$  gegen die Ekliptik (Umlaufbahn der Erde um die Sonne) gekippt. Dadurch entstehen Mond- und Sonnenfinsternisse im Abstand eines halben Jahres, und zwar dann, wenn die Mondumlaufbahn die Ekliptik schneidet (sog. Knoten). Sonst bewegt sich der Mond nördlich oder südlich um die Erde. Re.: Durch Einwirkung der Sonne auf den Mondkreisel präzediert dieser mit einer Periode von etwa 18 Jahren.

### Lösung.

$$a_{\text{Venus}} = \frac{2\gamma m_{\text{Venus}} r_{\text{E}}}{d^3}, \quad (1)$$

d. h. der Beschleunigungsunterschied ist dem Verhältnis der Massen proportional, es wäre also eine Tsunami-Welle von knapp 40 m Höhe um die Erde gelaufen.

**Aufgabe 6.13** Die Mondbahn ist um etwa  $5^\circ$  gegen die Ekliptik geneigt. Also müßte doch jeden Monat eine Mond- und Sonnenfinsternis beim Passieren geschehen. Wieso nicht?

**Lösung.** Entscheidend für eine Finsternis ist, daß ein *Knoten*, der Schnittpunkt zwischen Ekliptik und Mondbahn, genau zu Vollmond- bzw. Neumondphase passiert wird. Da die Sonne auch Gezeitenkräfte auf den Erde-Mond-Kreisel ausübt, wandern diese Knoten.

Dieses System ist stabil wegen des Umlaufs um die Sonne:

$$\frac{m_{\text{M}} v^2}{d} = \gamma \frac{M_{\text{S}} m_{\text{M}}}{d^2}. \quad (1)$$

Da der Mond aber bei Neumond näher und bei Vollmond weiter von der Sonne entfernt ist (im Mittel die Hälfte eines Monats näher und die Hälfte weiter), wirken auf ihn Gezeitenkräfte:

$$\Delta a = \frac{2\gamma m_{\text{M}} r_{\text{M}}}{d^3}. \quad (2)$$

$$F = \frac{2\gamma M_S m_M r_M}{d^3} = 2 \frac{m_M v^2 r_M}{d^2}. \quad (3)$$

Damit ist das Drehmoment

$$M = \frac{2m_M v^2 r_M^2}{d^2} \sin 5^\circ. \quad (4)$$

Das von der Sonne auf den Mondkreislauf ausgeübte Drehmoment führt zu einer Präzessionsfrequenz

$$\omega = \frac{M}{L \sin 5^\circ}. \quad (5)$$

$$L = m v_{\text{Mond}} r. \quad (6)$$

$$\omega = 2 \frac{r_M v^2}{v_M d^2} \approx 80 \text{ Jahre}. \quad (7)$$

Mit einer genaueren Rechnung (Berücksichtigung des monatshältigen Einflusses des Drehmoments etc.) errechnet man eine Periode von etwa 20 Jahren, das ist der *Saros*-Zyklus, der die Perioden von Sonnen- und Mondfinsternissen beherrscht.

**Aufgabe 6.14** Berechnen Sie Bahngeschwindigkeit und Umlaufzeit eines Satelliten, der in

1. 300 km,
2. 1000 km,
3. 36 000 km (geostationärer Satellit) und
4. 385 000 km (Mond)

um die Erde kreist! Beachten Sie dabei, daß  $g$  nach außen abnimmt nach

$$a = g \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (1)$$

mit  $R$  dem Erdradius (6 370 km), und man bereits ab einer Höhe von 1000 km mit dem 3. KEPLERSchen Gesetz

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{r^3}{g R^2} \quad (2)$$

rechnen sollte!

**Lösung.**

1. 300 km

$$a = 0,91 \cdot g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \quad (3)$$

$$T = 5424 \text{ sec} \wedge v = 7,73 \text{ km/sec}. \quad (4)$$

2. 1000 km

$$a = 0,75 \cdot g \Rightarrow T = 6300 \text{ sec} \wedge v = 7,35 \text{ km/sec}. \quad (5)$$

Rechnet man mit dem 3. KEPLERSchen Gesetz, kommt man auf

$$T = 6200 \text{ sec} \wedge v = 7,45 \text{ km/sec}. \quad (6)$$

3. 36 000 km

$$T = 86855 \text{ sec} = 24,13 \text{ h} \wedge v = 3065 \text{ m/sec}. \quad (7)$$

4. 385 000 km

$$T = 30 \text{ Tage} \wedge v = 1002 \text{ m/sec}. \quad (8)$$

**Aufgabe 6.15** Ein Satellit einer Masse von 1000 kg soll aus einer Erdumlaufbahn in den potentialfreien Raum gebracht werden. Wie hoch muß die Fluchtgeschwindigkeit, die sog. *zweite kosmische Geschwindigkeit*, im Verhältnis zur 1. sein?

**Lösung.**

Die Gesamtenergie auf einer beliebigen Bahn im Einflußbereich einer Zentralkraft ist

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r}, \quad (1)$$

was für den Fall einer Kreisbahn ergibt:

$$mv^2 = \gamma \frac{Mm}{r}, \quad (2)$$

womit der Virialsatz

$$E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot}} \quad (3)$$

erfüllt ist. Damit ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie auf

- einer elliptischen Bahn (im Spezialfall: Kreisbahn) negativ,

- auf einer hyperbolischen Bahn positiv,
- auf einer parabolischen Bahn null.

Nach Gl. (1) also mit  $R$  dem Erdradius + 250 km

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} = 0 : \quad (4)$$

$$v_2 = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}}, \quad (5)$$

$$g = \gamma \frac{M}{R} \quad (6)$$

$$v_2 = \sqrt{2gr}. \quad (7)$$

Die erste kosmische Geschwindigkeit ist  $v_1 = \sqrt{gR} = 8$  km/s, damit ist  $v_2$  etwa 11,2 km/s.



# 7 Mechanik deformierbarer Medien

Im allgemeinen bewirken Kräfte, die an einem starren, ausgedehnten Körper angreifen, außer Translationen auch Rotationen. Wenn am starren Körper keine beschleunigten Translationen und Rotationen vorkommen, befindet er sich im Gleichgewicht, die Wirkung aller an ihm angreifenden Kräfte ist dann Null.

Wir wollen nun zulassen, daß der Körper der Kraft durch Deformation (temporäre oder permanente) ausweichen kann, und beginnen mit der Beschreibung der *Aggregatzustände*.

## 7.1 Aggregatzustände

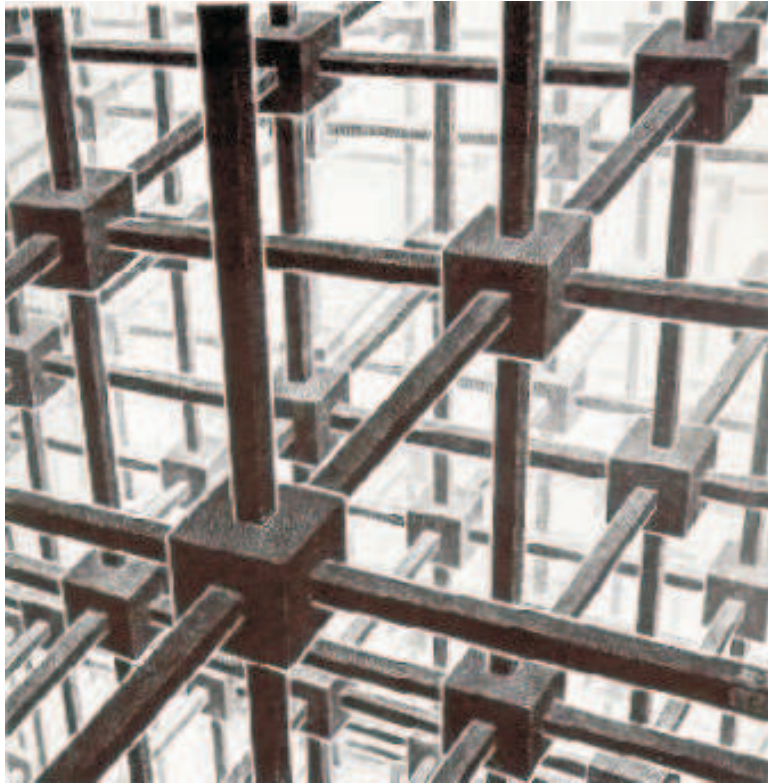
### 7.1.1 Fester Zustand

Festkörper weisen eine Gestalts- und Volumenelastizität auf, d. h. nach der Einwirkung einer Kraft, die zu einer temporären Deformation geführt haben (Scherung, Biegung ...) versucht der Körper, seine ursprüngliche Form wieder anzunehmen, dies gilt auch für Volumenänderungen (Kompression, Dilatation). Bei zu großen Beanspruchungen ist die Verformung nicht mehr rückgängig zu machen: Elastischer  $\leftrightarrow$  Plastischer Bereich. Im Kristall: *Fernordnung* über große Distanzen, gemessen am Abstand nächster Nachbarn (sog. *Nahordnung*). Idealer Festkörper: völlig gleichmäßig und regelmäßig in einer bestimmten Gitterstruktur aufgebaut bis ins „Unendliche“ (Abb. 7.1).

### 7.1.2 Flüssigkeiten

nehmen ein bestimmtes Volumen (Volumenelastizität) ein, haben aber keine bestimmte Form und sind deswegen nicht gestalts- oder formelastisch. Der Abstand zwischen den Molekeln ist dem im Festkörper aber vergleichbar (Volumensprung von nur wenigen Prozent beim Schmelzen). Daher existiert wohl eine Nah-, aber keine Fernordnung mehr, und es gibt keine ideale ruhende Flüssigkeit.

In einer Flüssigkeit bleiben im Gegensatz zum Festkörper keine Schubspannungen erhalten. Die Oberfläche einer Flüssigkeit steht immer senkrecht zu der an den Molekeln angreifenden Kraft. Daher stehen Wasserflächen senkrecht zur Gravitationskraft.



**Abb. 7.1.** Künstlerische Darstellung eines dreidimensionalen Gitters (MAURITS C. ESCHER: *Kubische Raumaufteilung*, 1952).

### 7.1.3 Gase

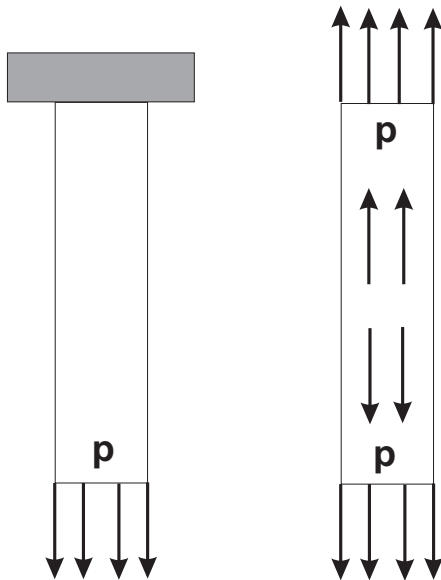
erfüllen jeden Raum: keine Formelastizität, etwas Volumenelastizität, daher sind Gase sehr viel leichter kompressibel als Flüssigkeiten. Der Abstand zwischen den Molekeln ist bedeutend größer als in der Flüssigkeit (Volumensprung beim Verdampfen typisch Faktor 1000). Ideales Gas: keine Wechselwirkung mehr zwischen den Molekeln.

## 7.2 Deformation fester Körper

### 7.2.1 Dehnung

Da ein Festkörper sich sowohl einer Veränderung seines Volumens wie seiner Gestalt widersetzt, muß auch bei konstantem Volumen bei einer Formänderung Arbeit geleistet werden. Damit hängt die Energie eines Festkörpers nicht nur vom Volumen, sondern auch von seiner Form ab.

Die einfachste Deformation ist die Dehnung (Abb. 7.2). Ideales Versuchsobjekt dafür ist ein langer, an einem Ende eingespannter Stab oder Draht mit dem Querschnitt  $Q$ , der am freien Ende durch eine dort angreifende Kraft  $F$  gedehnt wird.



**Abb. 7.2.** Zur Dehnung eines eindimensionalen Stabes. Rechts fiktiver Ersatz der Decke mittels des 3. NEWTONSchen Axioms oder des Prinzips von D’ALEMBERT.

Wegen des D’ALEMBERTSchen Gesetzes kann man sich die Befestigung am oberen Ende durch eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft wie am unteren Stabende ersetzt denken. Der bei der Deformation entstehende Druck, in diesem Fall redet man von der elastischen Spannung  $p = F/Q$ , ist wegen der Fernordnung längs des Stabes gleich, womit jedes Volumenelement (wg. der Quasi-Eindimensionalität sagt man auch Längenelement) gleich stark belastet und als Folge der Spannung um den gleichen Betrag wie das benachbarte Längenelement gedehnt wird, womit die relative Längenänderung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.1)$$

unabhängig von der ursprünglichen Stablänge  $l_0$  wird. Da die Dilatation bis zur Fließgrenze der Spannung proportional ist, gilt weiter das HOOKESche Gesetz

$$\varepsilon = \frac{p}{E}, \quad (7.2)$$

mit  $E$  dem materialspezifischen Elastizitätsmodul oder YOUNGSchen Modul mit der Einheit des Drucks (Tabelle 7.1).

### 7.2.2 Querkontraktion

Der Stab wird zwar bei der Dehnung dünner und diese Verringerung der Querabmessungen ist der Zugspannung ebenfalls proportional; jedoch läßt sich deren Wert nicht einfach aus dem Elastizitätsmodul errechnen. Sie ist für jedes Material ebenfalls charakteristisch und heißt POISSON-Zahl  $\sigma$ . Die relative Verkleinerung der Querabmessungen  $\Delta d/d_0$  ist damit

**Tabelle 7.1.** Elastizitätsmodul (auch YOUNG'scher Modul) für einige Festkörper.

<i>Feststoff</i>	<i>E-Modul</i> [10 <sup>11</sup> Pa]
Iridium	5,2
Stahl	2,0 – 2,1
Kupfer	1,3
Quarz	0,73
Blei	0,16
Eis (–2°C)	0,03

$$-\frac{\Delta d}{d_0} = \sigma \frac{\Delta l}{l_0} = \sigma \frac{p}{E}. \quad (7.3)$$

Für die meisten Materialien liegt  $\sigma$  zwischen 0,25 und 0,5. Der Wert kann für poröse Körper sehr kleine Werte annehmen.

### 7.2.3 Elastische Energie

Die an einem Körper von der Kraft  $F$  geleistete Arbeit ist in diesem als *elastische Energie* gespeichert. Mit Gl. (7.1) in differentieller Form schreiben wir

$$dU = Fdl = Fl_0d\varepsilon. \quad (7.4)$$

Gleichzeitig gelten die Beziehungen

- $F = pA$ ,
- $V = Al_0$ ,
- $p = E\varepsilon$ ,

womit sich die Relation

$$AE\varepsilon \cdot l_0d\varepsilon = VE\varepsilon d\varepsilon = VE d\frac{\varepsilon^2}{2} \quad (7.5)$$

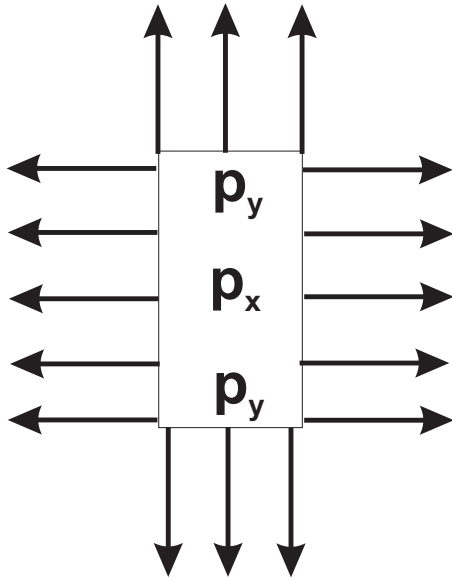
ergibt. Bei der Verlängerung des Stabes um  $\varepsilon$  ist also die Arbeit  $\frac{1}{2}VE\varepsilon^2$  zu verrichten. Umgekehrt enthält jetzt jede Volumeneinheit des deformierten Stabes die dem Quadrat der Deformationsgröße proportionale elastische Energie

$$U = E\frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (7.6)$$

Die Dehnung gehört zu den *homogenen* Deformationen: jedes Volumenelement des Körpers erfährt dieselbe Dehnung — im Gegensatz etwa zur Biegung, bei der wir uns vorstellen, daß der zu biegende Draht aus vielen Fasern bestehe. Nun ist an der Biegung der Radius der „inneren“ Fasern zweifellos kleiner als der der „äußeren“ Fasern: die inneren werden gestaucht, die äußeren gedehnt.

### 7.2.4 Allseitige Kompression

Wir betrachten ein sog. rechtwinkliges *Parallelepiped*, das wir allseits dehnen und stauchen (Abb. 7.3). Dabei stellen wir uns die Deformationen als nacheinander entstanden vor in



**Abb. 7.3.** Parallelepiped unter allseitigem Druck. Schnittzeichnung durch die  $z$ -Achse.

- in  $x$ -Richtung:  $\varepsilon_x$ ,
- in  $y$ -Richtung:  $\varepsilon_y$ ,
- in  $z$ -Richtung:  $\varepsilon_z$ .

Bei Verlängerung in  $x$ -Richtung verjüngt sich dabei der Körper in  $y$ - und  $z$ -Richtung und *vice versa*, z. B. mit Gl. (7.3)

$$\varepsilon_x = \frac{p_x}{E} \wedge \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\sigma \varepsilon_x = -\sigma \frac{p_x}{E}, \quad (7.7)$$

womit bei Summation über die drei Raumrichtungen das symmetrische Ergebnis

$$\varepsilon_x = \frac{p_x - \sigma(p_y + p_z)}{E}, \quad (7.8.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{p_y - \sigma(p_z + p_x)}{E}, \quad (7.8.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{p_z - \sigma(p_x + p_y)}{E} \quad (7.8.3)$$

folgt. Wie hoch ist die Änderung des Volumens  $V$ ?

$$V = l_x l_y l_z \Rightarrow \ln V = \ln(l_x l_y l_z) = \ln l_x + \ln l_y + \ln l_z, \quad (7.9)$$

womit für das Differential

$$d \ln V = \frac{dl_x}{l_x} + \frac{dl_y}{l_y} + \frac{dl_z}{l_z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (7.10)$$

folgt: die relative Volumenänderung ist gleich der Summe der relativen Verlängerungen in die drei Koordinatenrichtungen. Mit Gl. (7.8) ergibt sich

$$d \ln V = \frac{1 - 2\sigma}{E} (p_x + p_y + p_z). \quad (7.11)$$

Für eine isotrope Dilatation bzw. Kompression ist dann

$$\varepsilon = \frac{1 - 2\sigma}{E} p \wedge \frac{dV}{V} = 3\varepsilon = \frac{p}{K} \quad (7.12)$$

mit  $K$  dem Kompressionsmodul:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}. \quad (7.13)$$

### 7.2.5 Elastische Energie

Die elastische Energie, die bei isotroper Kompression pro Volumeneinheit im Körper gespeichert ist, ist

$$U = \frac{1}{2}(\varepsilon_x p_x + \varepsilon_y p_y + \varepsilon_z p_z) = \frac{3}{2}\varepsilon p = \frac{p^2}{2K}. \quad (7.14)$$

$U$  muß immer positiv sein. Bei negativem Druck findet eine Kompression, bei positivem Druck eine Dilatation statt. Ein Körper mit der umgekehrten Druckabhängigkeit wäre absolut instabil.

### 7.2.6 Poissonsche Ungleichung

Da  $K$  positiv ist, folgt aus der Definitionsgleichung (7.13)

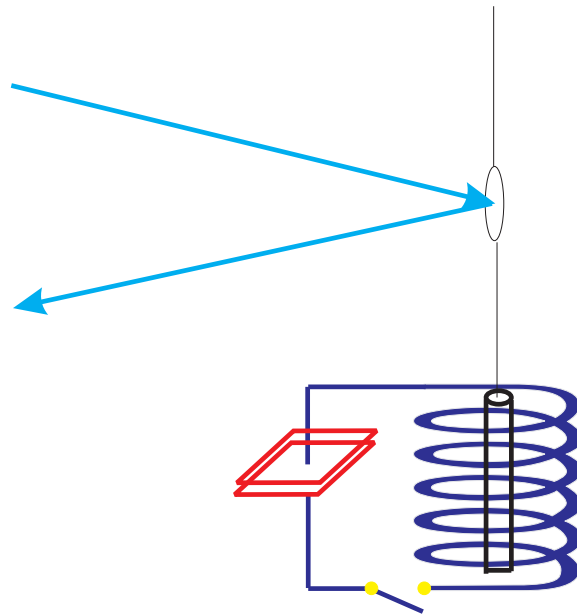
$$\sigma \leq \frac{1}{2}: \quad (7.15)$$

die POISSONSche Zahl kann höchstens  $\frac{1}{2}$  sein. Stoffe wie Gummi, die relativ leicht zu verformen sind, erreichen tatsächlich fast diesen Wert.

### 7.2.7 Scherung und Torsion

Bei der allseitigen Kompression wird das Volumen verändert, aber die Form des Werkstücks bleibt erhalten. Umgekehrt sind aber auch Formänderungen möglich, bei denen das Volumen erhalten bleibt, sog. *Scherungen* dreidimensionaler Körper. Ist

die Scherung auf zwei Dimensionen beschränkt, z. B. bei der Verdillung eines Stabes, spricht man von einer *Torsion*. Für kleine Werte des Torsionsmomentes gilt das HOOKEsche Gesetz. Von physikalischer Wichtigkeit ist das Torsionsmoment für *Torsionswaagen*, um Drehmomente zu bestimmen. Die „Stäbe“ bestehen dabei aus Quarzfäden von der Dicke zwischen 1 und 100  $\mu\text{m}$ , an denen Spiegel befestigt sind, um Lichtstrahlen zu reflektieren, deren Ablenkwinkel auf einer stark vergrößerten Skala sehr genau (auf Bruchteile einer Winkelminute) abzulesen ist (EINSTEIN-DE HAAS-Versuch zum Elektronenspin, Abb. 7.4).



**Abb. 7.4.** Durch das Experiment von EINSTEIN und DE HAAS wurde der Spin der Elektronen nachgewiesen. Der im Magnetfeld einer Spule magnetisierte Eisenstab (befestigt an einem Quarzfaden) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , dessen Drehung durch die Reflexion eines Lichtstrahls an einem Spiegel, der ebenfalls an diesem Quarzfaden befestigt ist, manifest wird.

Ähnlich wie in Gln. (7.12/7.13) kann man die Verformung beschreiben mit (Abb. (7.5))

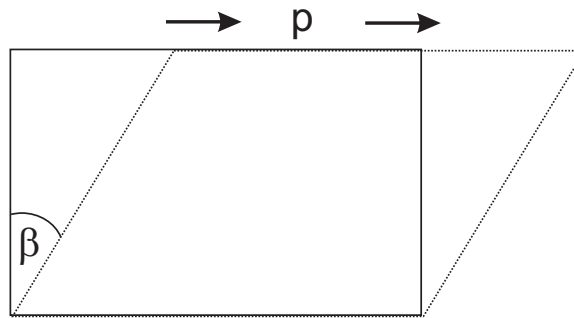
$$\varepsilon_x = \frac{1 + \sigma}{E} p_x \quad (7.16)$$

mit  $G$  dem Scherungsmodul:

$$G = \frac{E}{2(1 + 2\sigma)}, \quad (7.17)$$

so daß für kleine Scherungen die Beziehung

$$\beta = \frac{p}{G} \quad (7.18)$$



**Abb. 7.5.** Scherung eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen untere Randebene befestigt ist, während an der oberen Ebene Schubspannungen angreifen.

gilt.

### 7.2.8 Plastizität

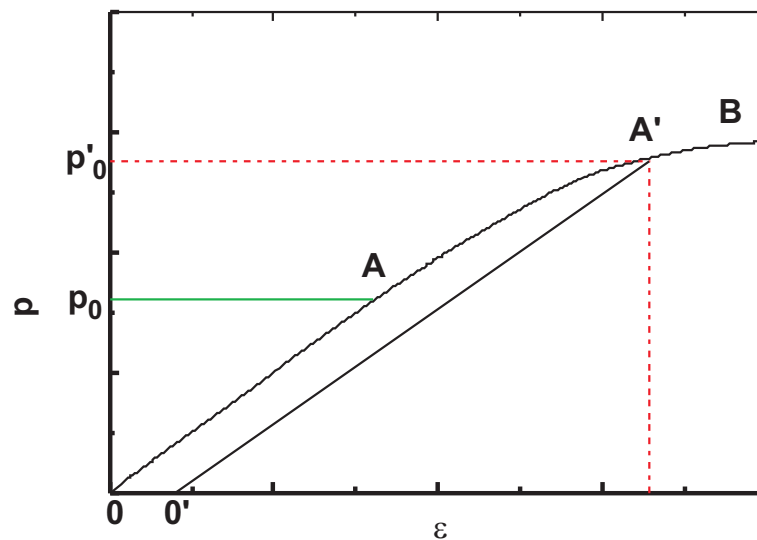
Kompression/Dehnung (Dilatation) und Scherung unterscheiden sich prinzipiell.

**Beispiel 7.1.** Versuchskette:

1. Ein Quader werde in ein verzerrtes hohles Parallelepiped gleichen Volumens gezwängt. Dabei muß Arbeit zur Scherung aufgewendet werden, die den Energieinhalt des Körpers als elastische Energie erhöht, und der Körper befindet sich nicht im thermischen Gleichgewicht.
2. Der Körper wird aufgeschmolzen und erstarrt in der Form des verzerrten Hohlkörpers in der energetisch nun günstigeren Form, da die Energie der Scherung fehlt. Mikroskopisch bedeutet das, daß sich die Atome im gleichen Gitter anordnen, der Körper aber insgesamt mit anderen Grenzflächen kristallisiert.

Schlußfolgerungen:

- Im Gegensatz dazu kann bei einer allseitigen Kompression die Energie nicht dadurch erniedrigt werden, daß die Atome bei gleicher Körperform umgelagert werden.
- Folglich ist die elastische Energie eine Funktion des Volumens (bzw. des Drucks) allein. Atomar gesehen, ändert sich bei der Kompression bzw. Dilatation nur der Abstand der Atome, nicht dagegen ihre Anordnung. Bei Aufhebung des äußeren Zwangs kehren die Atome in die Gleichgewichtslage zurück (elastische Deformation).
- Reagiert der Körper auf den äußeren Zwang durch Änderung seiner Form in der Weise, daß Atome ihre Anordnung verlassen und sich neu positionieren, findet eine permanente, *plastische Deformation* statt. Dies kann auch bei großen allseitigen Drücken bzw. Zugspannungen oberhalb der Elastizitäts- oder Fließgrenze geschehen (Abb. 7.6).



**Abb. 7.6.** (Teil einer) Hysteresekurve für elastische/plastische Verformung. Bereich 0 – A: Gültigkeitsbereich des HOOKESchen Gesetzes: Spannung ist der Dehnung proportional. Punkt A bei  $p_0$ : Beginn des plastischen Bereichs: Dehnung  $\varepsilon$  wächst schneller als die Spannung  $p$ ; es finden bleibende Verformungen statt. Bereich 0 – A': jungfräuliche Kurve. Punkt A'/ $p'_0$ : Durch Verfestigung erreichte neue Elastizitätsgrenze. Bereich 0'/A': neue HOOKESche Gerade. Länge 0/0': Plastische Deformation im Punkt A'. Länge 0'/a: Elastische Deformation im Punkt A'. Erneuter Zugversuch über den Punkt A' hinaus kann zu einer weiteren Verfestigung führen — bis zur *Fließgrenze*. Möglich ist aber ein vorheriges Zerreißen!

- Durch die erstmalige Verformung wird der Gültigkeitsbereich des HOOKESchen Gesetzes zu höheren Spannungen verschoben. Dies ist die sog. *Kaltverformung*, z. B. durch Verschieben einzelner atomarer Ebenen gegeneinander (Erzeugung von *Stufen- oder auch Schraubenversetzungen*). Umgekehrt werden damit Rückverbiegungen in den ursprünglichen Zustand erheblich erschwert (Nagel in die Wand).

## 7.3 Hydro- und Aerostatik

### 7.3.1 Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen

Flüssigkeiten unterscheiden sich von Gasen durch die Ausbildung einer Oberfläche, die durch das Wirken von *Nahordnungskräften* entsteht. Gemeinsam ist ihnen das Fehlen einer *Fernordnung*, die zum Verlust an Form- oder Gestaltelastizität führt.

### 7.3.2 Druck

Wir haben nun mehrfach den Begriff des Drucks gebraucht. Algebraisch versteht man darunter das Verhältnis der auf eine Fläche senkrecht wirkende Kraft (Abb. 7.7):

$$p = \frac{F}{A}, \quad (7.19)$$

unter speziellen Aspekten kann man aber auch den Energieinhalt eines Volumens darunter verstehen (s. BERNOULLI-Gleichung). Gemessen werden Drücke mit einem *Manometer* (Abb. 7.9), speziell der Luftdruck mit einem *Barometer*.

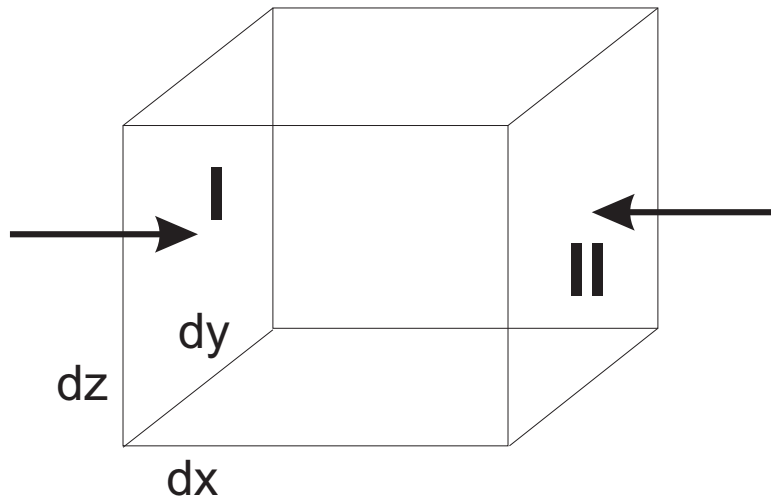


Abb. 7.7. Kräfte auf ein Volumenelement in  $x$ -Richtung.

Aus der Abb. 7.7 sehen wir, daß auf die beiden  $yz$ -Ebenen unterschiedliche Kräfte wirken, wenn der Druck sich in  $x$ -Richtung ändert. Sei die Kraft auf die Fläche I

$$F_{\text{I}} = p \, dy \, dz \quad (7.20.1)$$

und die Kraft auf die Fläche II

$$F_{\text{II}} = - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz; \quad (7.20.2)$$

dann ist die Differenz der Kräfte:

$$F_x = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz, \quad (7.20.3)$$

(entsprechend in  $y$ - und  $z$ -Richtung), so daß man als Gesamtkraft

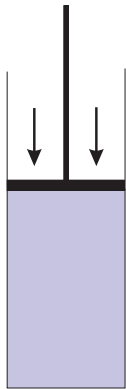
$$F = F_x + F_y + F_z = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz - \frac{\partial p}{\partial y} dy \, dx \, dz - \frac{\partial p}{\partial z} dz \, dx \, dy \quad (7.20.4)$$

erhält. Vektoriell ergibt sich somit

$$d\mathbf{F} = -\nabla p \cdot d^3x. \quad (7.20.5)$$

### 7.3.3 Kolbendruck

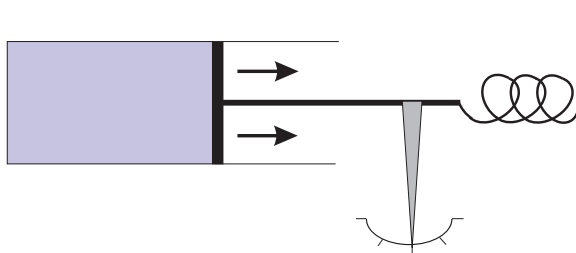
In einem Zylinder befinde sich eine (inkompressible) Flüssigkeit und werde durch einen Kolben mit der Fläche  $A$  abgeschlossen (Abb. 7.8). Auf jedes Flächenelement  $dA$  im Innern oder an der Oberfläche senkrecht zu  $dA$  wirkt die Kraft



**Abb. 7.8.** In einem mit einem beweglichen Kolben luftdicht abgeschlossenen Zylinder kann der Druck gegenüber dem Außendruck verschieden sein. Der so definierte „Kolbendruck“ ist an allen Gefäßwänden gleich.

$$dF = p \cdot dA : \quad (7.21)$$

der Druck ist kein Vektor. Innerhalb der Flüssigkeit ist der Druck überall gleich hoch. Der Druck im Innern wird als äußerer Druck durch eine ins Flüssigkeitsvolumen hineingebrachte Sonde, die ja wiederum eine Oberfläche (Membran) aufweist, gemessen. Den Kolben kann man verwenden, um daraus ein Manometer zu bauen (Abb. 7.9).



**Abb. 7.9.** In einem Kolbenmanometer wird der vom Kolben überstrichene Fahrweg quantitativ ausgewertet.

### 7.3.4 Kompressibilität

In Wirklichkeit sind die Flüssigkeiten (und Gase noch in viel größerem Maße) zusammendrückbar oder *kompressibel*. Der Kehrwert des bereits definierten Kompressionsmoduls  $K$  ist die Kompressibilität  $\kappa$ :

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}; \quad (7.22)$$

sie ist so definiert, daß bei einer Druckerhöhung das Volumen abnimmt (ein anderes Verhalten ist mechanisch nicht stabil sondern führt zu einer Explosion). Für Flüssigkeiten liegt der Wert typisch bei  $10^{-5} \text{ bar}^{-1}$ , flüssige Metalle wie Quecksilber sind um etwa einen Faktor 10 weniger kompressibel.

### 7.3.5 Schweredruck

Befindet sich die Flüssigkeit im Gravitationsfeld der Erde, variiert der Druck in der Flüssigkeit abhängig von der Höhe, die man von einem Referenzpunkt aus rechnet. In Abhängigkeit von der Tiefe herrscht also zusätzlich ein Druck, der sog. *Schweredruck*, der durch die Gewichtskraft der sich über dem Flächenelement befindlichen Flüssigkeitssäule ausgeübt wird ( $h$ : Höhe der Säule):

$$p = \frac{mgh}{V} = \rho gh. \quad (7.23)$$

Eine Wassersäule von 10 m Höhe erzeugt einen Druck von einer Atmosphäre, der gleich dem Druck einer 760 mm hohen Quecksilbersäule ist (historische Definition des Drucks).

Für geringe Höhenunterschiede, in denen die Dichte als konstant angesehen werden kann, gilt Gl. (7.23) auch für Luft, allgemein für Gase. Für größere Höhenunterschiede gilt dies deswegen nicht mehr, weil die Dichte selbst druckabhängig wird. Wenn  $h$  die Höhe über dem Meeresspiegel ist ( $h = 0$ ), dann ist

$$dp = -\rho g dh, \quad (7.24)$$

und da  $\rho$  eine (lineare) Druckfunktion ist, die sich als

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \quad (7.25)$$

approximieren läßt, wird

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} p g dh \Rightarrow \int d \ln p = -\int \frac{\rho_0}{p_0} g dh. \quad (7.26)$$

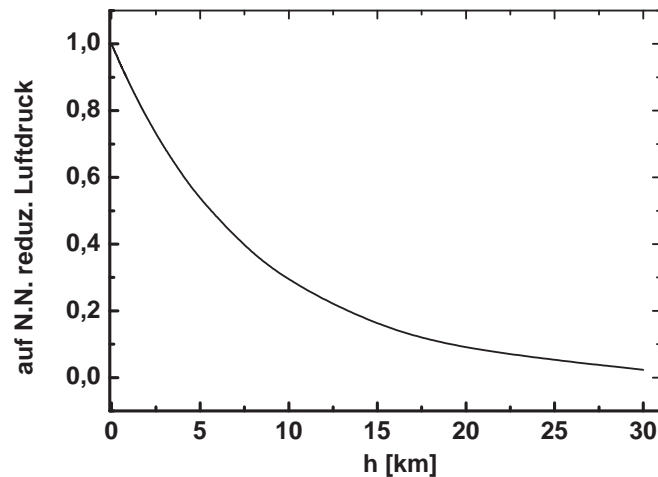
Mit den Randbedingungen auf Meereshöhe  $p = p_0$  für  $h = 0$  erhalten wir

$$\ln p - \ln p_0 = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g h, \quad (7.27)$$

also einen exponentiellen Zusammenhang zwischen  $p$  und  $h$  (*barometrische Höhenformel*), Abb. 7.10:<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Diese Formel erklärt nicht die Temperaturabnahme mit zunehmender Höhe (s. Physik IV). Wegen der adiabatischen Schichtung (in steigender Luft fällt der Druck, wobei sie sich ausdehnt) kühlt sich die Luft in der Troposphäre ab und heizt sich in der Stratosphäre wegen Sonneneinstrahlung wieder auf. Dabei wird bekanntermaßen das UV-Licht absorbiert, das zur Bildung von Ozon Anlaß gibt.

$$p = p_0 e^{-(\rho_0/p_0)gh}. \quad (7.28)$$



**Abb. 7.10.** Der Luftdruck nimmt in der Höhe nach der *barometrischen Höhenformel* exponentiell ab (isothermer Ansatz).

### 7.3.6 Auftrieb

Taucht ein Körper bis zur Tiefe  $h$  in eine Flüssigkeit, so wirkt auf seine Grundfläche senkrecht nach oben der Druck  $\rho gh$ . Ein zylindrischer Körper erfährt auf Grund seiner endlichen Ausdehnung an Ober- und Unterseite unterschiedliche statische Drücke (Abb. 7.11):

$$p_1 = \rho_{fl}gh_1 \wedge p_2 = \rho_{fl}gh_2 \vee p_2 = p_1 + \rho_{fl}g\Delta h. \quad (7.29)$$

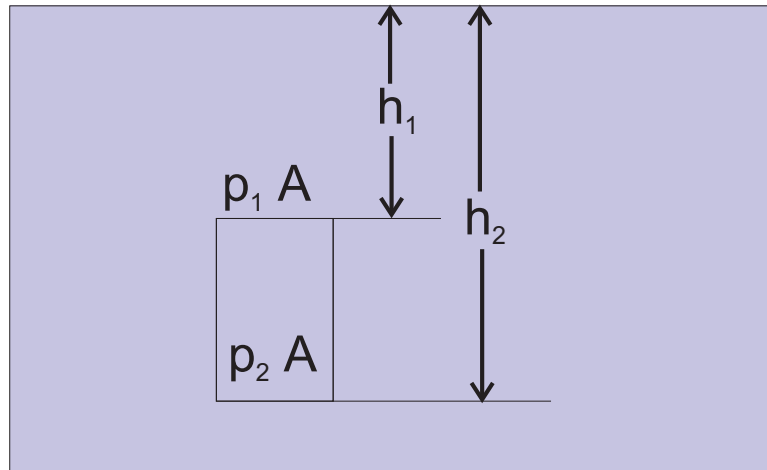
Damit ergibt sich die auf den Zylinder wirkende Kraft zu

$$F = (p_2 - p_1)A = \rho_{fl}g\Delta(hA) = \rho_{fl}gV = mg, \quad (7.30)$$

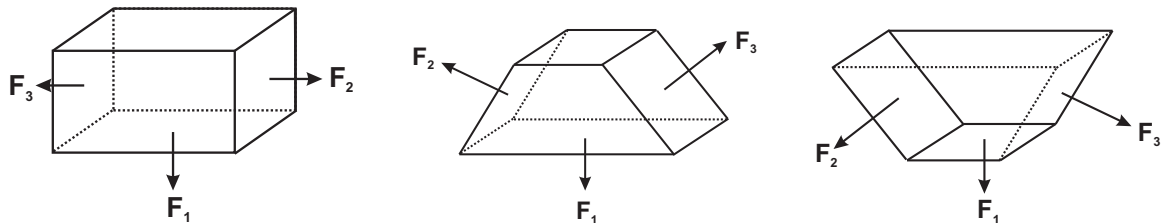
also gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

### 7.3.7 Hydrostatisches Paradoxon

Der Schweredruck ist nach Gl. (7.23) nur von Gefäßhöhe und Dichte der Flüssigkeit abhängig. Daher ist der Druck auf die Bodenfläche in den drei verschiedenen Gefäßen



**Abb. 7.11.** Zum Auftrieb, der gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.



**Abb. 7.12.** Der Druck auf die Bodenfläche ist in allen Hohlkörpern gleich.

der Abb. 7.12 bei gleicher Einfüllhöhe gleich (die Kraft steht immer senkrecht auf der Oberfläche einer Flüssigkeit!).

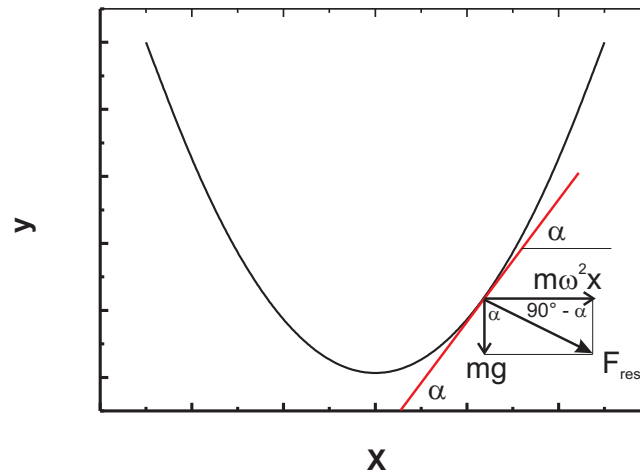
Das Gewicht der Flüssigkeiten ( $G = mg$ ) in den Behältern ist natürlich verschieden. Nach Gln. (7.20) sind aber die Komponenten  $F_x$  und  $F_z$

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (7.31.1)$$

und

$$F_y = -\frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy \quad (7.31.2)$$

entgegengesetzt gerichtet.



**Abb. 7.13.** Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit steht immer senkrecht auf dem Feldstärkevektor  $\mathbf{g}$  (bzw. der Gewichtskraft), der im Rotationsfall durch die Zentrifugalkraft ergänzt wird, so daß ein Rotationsellipsoid entsteht.

## 7.4 Hydrodynamik

### 7.4.1 Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit

Flüssigkeiten besitzen keine Gestalts- oder Formelastizität und passen sich daher jeder Form an. Unter dem Einfluß von Kräften verformen sie sich daher irreversibel. Da die Flüssigkeitsmolekeln der Kraft senkrecht oder tangential ausweichen, steht die Kraft immer senkrecht auf der Oberfläche. Die Oberfläche einer unter dem Einfluß einer Zentrifugalkraft sich befindenden Flüssigkeit steht daher senkrecht auf dem Vektor, der durch die Summe der Vektoren

$$m\omega^2 \mathbf{x} \wedge m\mathbf{g} \quad (7.32)$$

aufgespannt wird (Abb. 7.13). Es ergibt sich

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = m\omega^2 \mathbf{x} + m\mathbf{g} \quad (7.33.1)$$

dessen Komponenten

$$\cos \alpha = \frac{mg}{F_{\text{res}}} \quad (7.33.2)$$

und

$$\sin \alpha = \frac{m\omega^2 x}{F_{\text{res}}} \quad (7.33.3)$$

sind. Folglich gilt für den  $\tan \alpha$ :

$$\tan \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{dy}{dx}, \quad (7.34)$$

woraus für die Raumkurve selbst

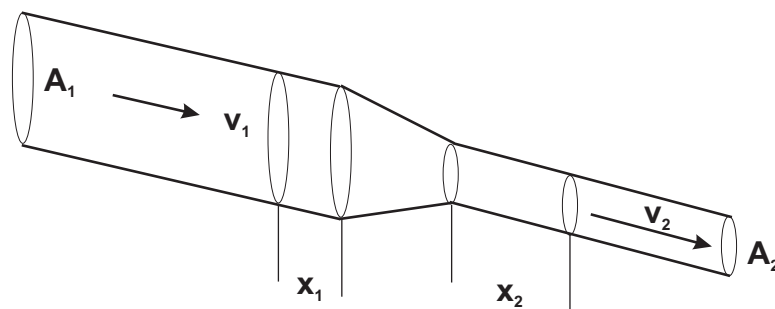
$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 \quad (7.35)$$

folgt.

### 7.4.2 Strömung einer idealen Flüssigkeit

Unter einer idealen Flüssigkeit verstehen wir ein inkompressibles Medium, dessen Komponenten frei, also ohne Reibungsverluste, gegeneinander verschiebbar sind. Strömungen werden modellmäßig durch ein *Strömungsfeld* beschrieben. Läßt man in die strömende Flüssigkeit Tintenfäden eintreten, ordnen sich diese in *Stromlinien*. Bei einer stationären Stromlinie ist die Stromlinie der Weg, den eine Flüssigkeitspartikel durchläuft. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  einer Partikel ist tangential zur Stromlinie gerichtet. Legt man eine Fläche senkrecht zu den Stromlinien, nennt man die Anzahl der durch diese Fläche hindurchtretenden Stromfäden die *Stromliniendichte*. Zwei Stromlinien können sich niemals schneiden, da sonst die Geschwindigkeit an der Schnittstelle zwei verschiedene Richtungen haben würde.

Für eine derartige Flüssigkeit gilt die *Kontinuitätsgleichung*, nach der in gleichen Zeiten gleiche Volumina durch ein System von Röhren unterschiedlichen Querschnitts fließen (Abb. 7.14):



**Abb. 7.14.** In gleichen Zeiten strömen gleiche Volumina durch Röhren unterschiedlichen Querschnitts (Kontinuität).

$$A_1 v_1 \rho = A_2 v_2 \rho \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2. \quad (7.36)$$

1. Diese Gleichung bedingt bei unterschiedlichen Rohrdurchmessern unterschiedliche Geschwindigkeiten der Flüssigkeit.
2. Beim Strömen in eine Röhre kleineren Durchmessers wird die Flüssigkeit beschleunigt; es wirken also Kräfte auf sie ein.
3. Wenn Kräfte an der Flüssigkeit angreifen, muß ein Druckgefälle entstehen.
4. Wenn der Gesamtdruck in der Flüssigkeit konstant ist, muß der Druck an Stellen höherer Geschwindigkeit niedriger sein als an Stellen niedrigerer Geschwindigkeit.
5. Wenn Kräfte auftreten, verrichten sie entlang einer Wegstrecke Arbeit, Beschleunigungsarbeit, die sich im Druckgefälle widerspiegelt.

In Abb. 7.13 tritt durch  $A_1$  die Flüssigkeitsmenge  $V_1 = A_1 x_1$  ein, wozu die Kraft  $F_1 = p_1 A_1$  erforderlich, und die Arbeit  $W_1 = p_1 A_1 x_1$  aufzubringen ist, entsprechend an der engeren Stelle mit dem Querschnitt  $A_2$ . Die kinetische Energie im engeren Teil des Rohrs ist  $T_2 = \frac{1}{2} \rho V v_2^2$ ; sie muß nach dem Energiesatz gleich der Differenz der Arbeiten  $W_1$  und  $W_2$  sein:

$$p_1 A_1 x_1 - p_2 A_2 x_2 = \frac{1}{2} \rho V (v_2^2 - v_1^2). \quad (7.37)$$

nach der Kontinuitätsgleichung ist

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow \frac{1}{t} (A_1 x_1 = A_2 x_2), \quad (7.38)$$

so daß nach der Division durch das durchströmte Volumen  $V = A_1 x_1$  bzw.  $V = A_2 x_2$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \text{const} \quad (7.39)$$

folgt (Gleichung von BERNOULLI), wobei die rechte Seite die Differenz der *Staudrücke* oder der *dynamischen Drücke* darstellt. Vervollständigt man beide Seiten noch durch den Schweredruck und den statischen Druck, ergibt sich die erweiterte Gleichung von BERNOULLI:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh = \text{const}, \quad (7.40)$$

die also eine andere Form des Satzes von der Erhaltung der Energie ist. — Der Staudruck ergibt sich als Differenz des Gesamtdrucks und des statischen Drucks.

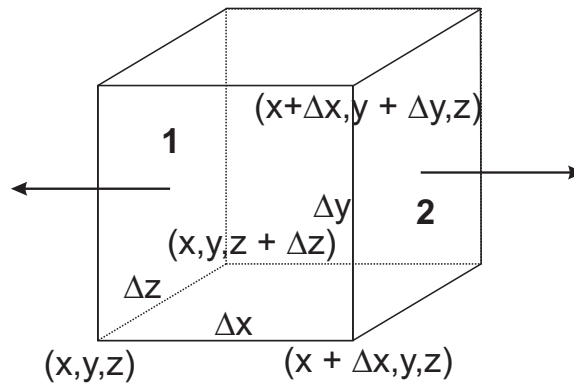
**7.4.2.1 Zur Kontinuitätsgleichung.** Das Volumen einer durch einen Querschnitt  $dA$  strömenden Flüssigkeit kann man als Integral der Stromdichte  $\mathbf{j}$  und des durchflossenen Flächenelements  $dA$  ausdrücken,

$$V = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (7.41.1)$$

wobei dieses senkrecht auf der Stromrichtung steht ( $\mathbf{n}$  ist der Einheitsvektor, der senkrecht auf dem Flächenelement steht). Für ein inkompressibles Medium muß das in der Zeiteinheit  $dt$  zufließende Volumen (+) gleich dem abfließenden (-) sein,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\rho d^3x = dV) = - \int j dA. \quad (7.41.2)$$

**7.4.2.2 Gaußscher Satz.** Was ist, wenn das Medium nicht inkompressibel ist? Dazu betrachten wir einen Kubus, auf dessen  $-x$ -Seite, also in der  $yz$ -Ebene, ein Medium hinein- und auf dessen  $+x$ -Seite, wieder durch die  $yz$ -Ebene, hinausströme (Abb. 7.15).



**Abb. 7.15.** Zum GAUSSschen Theorem. Eine kompressible Flüssigkeit strömt in  $x$ -Richtung von negativen  $x$  zu positiven  $x$  durch einen Würfel. Wie groß ist die *Ergiebigkeit* des Quellengebiets (wieviel Flüssigkeit kommt also hier dazu)?

Der Fluß auf der  $-x$ -Seite (Fläche 1) ist natürlich negativ, da ja nichts hinaus-, sondern im Gegenteil hineinströmt. Diese Seite stellt also eine *Senke* dar. Der Fluss  $\Phi$  ist also das Produkt der Stromdichte  $j_x$  und der durchströmten Fläche  $\Delta y \Delta z$ :

$$\Phi(-x) = -j_1 \Delta y \Delta z. \quad (7.42.1)$$

entsprechend auf der  $+x$ -Seite (Seite 2)

$$\Phi(+x) = j_2 \Delta y \Delta z. \quad (7.42.2)$$

Lassen wir zu, daß sich die Flüsse geringfügig unterscheiden dürfen, dann ist also die Änderung mit einem linearen Ansatz

$$j_2 = j_1 + \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x, \quad (7.43)$$

womit der Fluß aus der Fläche 2

$$\Phi_2 = \left( j_1 + \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \quad (7.44)$$

und damit deren Differenz oder Ergiebigkeit

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (7.45.1)$$

wird,<sup>2</sup> entsprechend in die zwei anderen Raumrichtungen

$$\frac{\partial j_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (7.45.2)$$

$$\frac{\partial j_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z; \quad (7.45.3)$$

insgesamt also mit Gl. (7.41.1)

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA = \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (7.46.1)$$

was aber gleich der Divergenz des Vektors  $\mathbf{j}$  ist. Außerdem ist  $\Delta x \Delta y \Delta z$  gleich dem Volumen  $V$  des Kubus. Folglich gilt der GAUSSsche Satz

$$\int_A \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV. \quad (7.46.2)$$

### 7.4.3 Anwendungen

**7.4.3.1 Ausströmung aus einem Loch.** Am Boden eines offenen Rotweinfasses befinde sich seitlich ein kleines Loch, durch das der Rotwein ausströme, der das Faß momentan bis zur Höhe  $h$  fülle (Abb. 7.16).

Dann wirkt auf das Volumen am Boden der hydrostatische Druck  $p = \rho gh$ , der gleich dem Gesamtdruck ist, weil wegen der Kleinheit des Lochs keine merkliche Strömung innerhalb des Weins zu beobachten ist. Außerhalb ist der Druck Null:

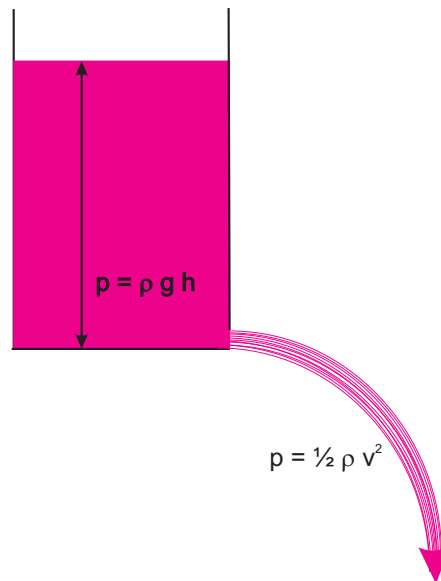
$$p_{\text{innen}} = P_{\text{außen}} \Rightarrow \rho gh = \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}. \quad (7.47)$$

Dies ist das Gesetz von TORRICELLI.<sup>3</sup> Befestigen wir unten einen Schlauch und drehen die Öffnung nach oben, wird beobachtet, daß der Flüssigkeitspegel nicht erreicht wird. Das liegt an der inneren Reibung der Flüssigkeit, wodurch kinetische Energie verzehrt wird.

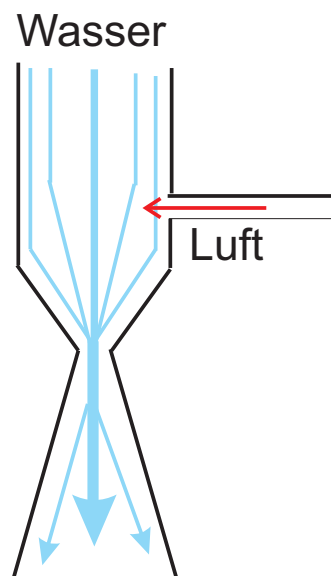
**7.4.3.2 Wasserstrahlpumpe.** Wasser trete aus einer engen Düse mit hoher Geschwindigkeit aus und kommt auf Atmosphärendruck eines endlichen, geschlossenen Volumens. Dann bildet sich an der Düse ein starker Unterdruck aus (Abb. 7.17).

<sup>2</sup>Dabei wird die Ableitung in der Mitte der Fläche 1 gebildet, also bei  $-x, y + \frac{1}{2}\Delta y, z + \frac{1}{2}\Delta z$ .

<sup>3</sup>Dieses gilt auch für alle anderen Flüssigkeiten.



**Abb. 7.16.** Der Strahl einer Flüssigkeit beschreibt beim Ausströmen aus einem Loch eine parabolische Bahn, die durch deren hydrostatischen Druck entsteht.



**Abb. 7.17.** Nach dem Gesetz von BERNOULLI funktioniert die Wasserstrahlpumpe.

#### 7.4.4 Laminare Strömung

**7.4.4.1 Zähigkeit oder Viskosität.** Aus dem TORRICELLI-Versuch geht hervor, daß die zwischenmolekularen Kräfte zwischen den Wassermolekülen nicht zu vernachlässigen sind; daher benötigt man eine bestimmte definierte Kraft, um eine

Flüssigkeit zwischen zwei begrenzenden Platten oder in einem Rohr gleichförmig strömen zu lassen, also ein *Druckgefälle* in Strömungsrichtung. Senkrecht dazu baut sich ein Geschwindigkeits- oder Impulsgradient auf, da die Geschwindigkeit am Rand am geringsten (im Modellfall: Null) und in der Mitte der Strömung am höchsten ist. Wenn man sich für das Profil der Geschwindigkeit interessiert, fragt man damit, wie schnell welcher Impuls von der Mitte des Stroms zum Rohrrand übertragen wird, oder auf eine Probestfläche bezogen, wie hoch die Impulsstromdichte  $\Pi$  sei:

$$\Pi = -\eta \frac{dv}{dr} \quad (7.48)$$

mit  $\eta$  der *Zähigkeit* oder *Viskosität* (s. a. Kap. 8). Dimensionsmäßig ist

$$[\Pi] = \frac{[\text{kg m sec}^{-1}]}{[\text{m}^2 \text{ sec}]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (7.49.1)$$

womit wir für die Einheit der (dynamischen) Zähigkeit

$$[\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{m sec}} \quad (7.49.2)$$

erhalten.<sup>4</sup> Da der so definierte Koeffizient der Zähigkeit die Geschwindigkeit bestimmt, mit der die Impulsübertragung im Strömungsfeld erfolgt, gewinnen wir bei Division durch die Masse eine Vorstellung davon, wie schnell sich die Strömungsgeschwindigkeit ausgleicht. Tatsächlich dividiert man durch die Masse einer Volumeneinheit, weil man mit Flüssigkeiten zu tun hat, also durch die Dichte und bezeichnet diesen Koeffizienten als *kinematische Zähigkeit*  $\nu$ , die die Dimension

$$[\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \quad (7.49.3)$$

hat.

Da wir wissen, daß die Geschwindigkeit am Rand des Rohrs Null ist, ist der Impulsstrom auf das Rohr der Länge  $L$  und dem Radius  $r$  mit Gl. (7.48)

$$2\pi r L \Pi = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}, \quad (7.50)$$

also gerade der Reibungskraft  $F_R$  auf die Rohrwand. Um das Flüssigkeitsvolumen hindurchzupressen, bedarf es der Kraft  $F = \pi r^2 \Delta p$ :

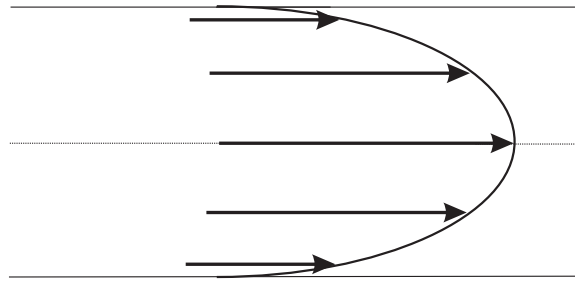
$$F = F_R \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2L\eta} \Delta p \Rightarrow v = -\frac{r^2}{4L\eta} \Delta p + \text{const.} \quad (7.51)$$

Die Konstante bestimmen wir mit der Randbedingung  $v_{\text{Rand}} = 0$ :

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta} (a^2 - r^2), \quad (7.52)$$

womit wir ein *parabolisches Geschwindigkeitsprofil* erhalten (Abb. 7.18).

<sup>4</sup>Im cgs-System hieß die Einheit g/(s cm) Poise.



**Abb. 7.18.** Eine zähe Flüssigkeit strömt unter Ausprägung eines parabolischen Geschwindigkeitsprofils durch ein Rohr.

**7.4.4.2 Hagen-Poiseuillesches Gesetz.** Das mit dieser Kraft durch das Rohr gepreßte Volumen einer zähen Flüssigkeit ist

$$\int dV = \int_{r=0}^{r=a} v(r) dA = v(r) 2\pi r dr = \int_{r=0}^{r=a} v(r) \pi dr^2, \quad (7.53.1)$$

also

$$\int dV = \int_{r=0}^{r=a} \frac{\pi \Delta p}{4 L \eta} (a^2 - r^2) d(r^2). \quad (7.53.2)$$

Also ist

$$V(r) = \frac{\pi \Delta p}{4 L \eta} \left( \frac{a^2 r^2 - r^4}{2} \right) = \frac{\pi \Delta p}{8 L \eta} (a^2 r^2 - r^4) : \quad (7.54)$$

Die aus dem Rohr ausfließende Menge hängt empfindlich vom Radius des Rohrs ab.

#### 7.4.5 Stokessches Gesetz und Ähnlichkeitsmethode

Fragen wir umgekehrt nach der Widerstandskraft  $F$ , die ein in einer zähen Flüssigkeit bewegter Körper, im einfachsten Fall eine Kugel, erfährt, dann ist bei genügend kleiner Geschwindigkeit die Widerstandskraft immer der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional. Dabei ist es gleichgültig, ob sich die Kugel im ruhenden Medium bewegt, oder das Medium um die ruhende Kugel fließt (ähnlich wie der Bob in der Eisrinne oder die Nadel in den Rillen einer alten Schallplatte aus Vinyl).

Wir erwarten eine Abhängigkeit, in die

- die Dichte der Flüssigkeit ( $[\rho] = \text{g/cm}^3$ ),
- die Zähigkeit der Flüssigkeit ( $[\eta] = \text{g/cm sec}$ ),
- die Geschwindigkeit der Flüssigkeit (oder der Kugel) ( $[v] = \text{cm/sec}$ ),
- die Abmessungen des Gegenstands (für eine Kugel ihr Radius oder ihre Oberfläche) ( $[r] = \text{cm}$ )

eingehen. Aus den Einheiten bilden wir jetzt eine dimensionslose Größe, die das Verhältnis von Beschleunigungsarbeit zu Reibungsarbeit charakterisiert (rein dimensionsmäßige Betrachtung):

$$\frac{\text{Beschleunigungsarbeit}}{\text{Reibungsarbeit}} = \frac{(\frac{1}{2}mv^2 = \rho r^3 v^2)}{(F_R r = \eta A \nabla v r)} \quad (7.55)$$

die REYNOLDSSche Zahl  $Re$  heißt:

$$Re = \frac{vr}{\nu} = \frac{\rho vr}{\eta}, \quad (7.56)$$

und mit der das Bewegungsgeschehen in einer realen, zähen Flüssigkeit beschrieben wird.

Die Widerstandskraft  $F$  hat nun die Dimension

$$[F] = \text{kg m sec}^{-2}, \quad (7.57)$$

die ganz allgemein aus den gegebenen Größen als

$$F = \rho v^2 r^2 f(Re) \quad (7.58)$$

gebildet werden kann. Die Funktion  $f(Re)$  kann natürlich nicht aus einfachen Dimensionsüberlegungen abgeleitet werden, sondern muß experimentell erhalten werden. Dabei kann die Form des Körpers, der vom Medium umspült wird, beliebig sein. Da aber in der REYNOLDSSchen Zahl die Dimension der Länge linear vorkommt, kann man z. B. Körper gleicher Form, aber unterschiedlicher Größe, durch Experiment und anschließende Umskalierung miteinander vergleichen (ähnlich mit Dichte, Zähigkeit und Geschwindigkeit). Daher nennt man Bewegungsprobleme, bei denen die einzelnen Parameter zwar unterschiedlich groß sind, aber dieselbe REYNOLDSSche Zahl ergeben, *ähnlich*. Insbesondere gelten die hier angestellten Überlegungen auch für inkompressible Gase (das gilt bis zu Geschwindigkeiten, die vergleichbar der Schallgeschwindigkeit sind) und faßt die beiden Systeme unter dem Begriff *Fluid* zusammen.

Um die erwartete Abhängigkeit zwischen  $F$  und  $v^1$  aus Gl. (7.58) zu erhalten, müssen wir annehmen, daß  $f(Re)$  bei kleinen Geschwindigkeiten von der Form

$$f(Re) = \frac{\text{const}}{Re} \quad (7.59)$$

ist:

$$F = \text{const} \cdot \eta r v. \quad (7.60.1)$$

Für den Fall der Kugel konnte STOKES zeigen, daß die Konstante

$$\text{const} = 6\pi. \quad (7.60.2)$$

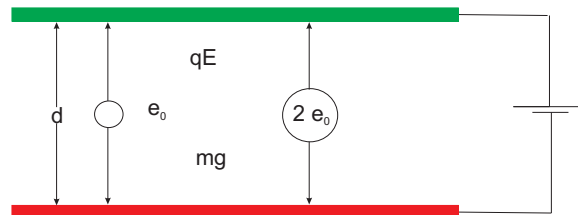
ist (STOKESSches Gesetz). Voraussetzung für seine Gültigkeit ist eine hinreichend niedrige Geschwindigkeit bei vorgegebener Größe, oder bei sehr kleiner vorgegebener Größe auch eine höhere Geschwindigkeit:

$$Re = \frac{rv}{\nu} \ll 1. \quad (7.61)$$

Läßt man eine Kugel in einem zähen Medium unter dem Einfluß der Schwerkraft fallen, stellt sich ein Gleichgewicht ein, bei der die um den teilweisen Gewichtsverlust korrigierte Fallbeschleunigung durch die Widerstandskraft kompensiert wird (Methode zur Bestimmung der dynamischen Viskosität):

$$v = \frac{F}{6\pi\eta r}. \quad (7.62)$$

**7.4.5.1 Bestimmung der Elementarladung durch Millikan.** Als erster bestimmte MILLIKAN die Größe der Elementarladung durch Versprühen eines Öls (wodurch sehr kleine Nebeltröpfchen erzeugt wurden) in den Raum zwischen zwei hoch aufgeladenen Kondensatorplatten. Dabei wurden die Tröpfchen teilweise ionisiert. Da die ungeladenen Tröpfchen im Schwerfeld fallen, kann man mittels eines Mikroskops ihre Fallgeschwindigkeit messen und bei Gültigkeit des STOKESSchen Gesetzes ihren Radius, damit ihr Volumen und damit bei bekannter Dichte die Masse der Tröpfchen bestimmen. Bei einer bestimmten Potentialdifferenz schwebt ein Teil der geladenen Tröpfchen, weil sich elektrische und Gewichtskraft kompensieren ( $d$ : Plattenabstand, Abb. 7.19):



**Abb. 7.19.** MILLIKAN-Versuch: Ein Öltröpfchen, das eine oder eine Vielzahl der Elementarladung trägt, schwebt im konstanten Kondensatorfeld.

$$F_{\text{Gewicht}} = F_{\text{elektr.}} \vee m \cdot g = n \cdot e_0 \cdot \frac{U}{d}. \quad (7.63)$$

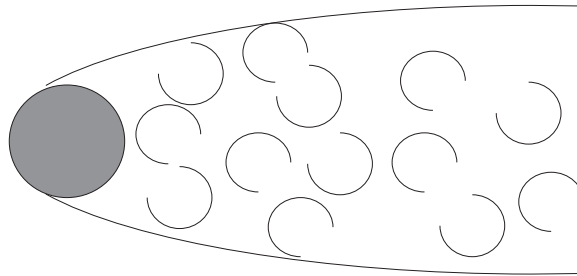
Es stellte sich heraus, daß die Tröpfchenladung immer ein Vielfaches einer bestimmten Größe war, auf die man als „Elementarladung“ spekuliert und nun gefunden hatte.

## 7.4.6 Wirbel

Charakteristisch für die in Abschn. 7.4.4 betrachtete Strömung ist ihre Ordnung: Jedes Flüssigkeitsteilchen bewegt sich auf seiner Bahn, und die verschiedenen Schichten der Flüssigkeit bewegen sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten: *laminare Strömung*.

**Tabelle 7.2.** Zusammenstellung der Abhängigkeiten für kleine und große Werte von  $Re$ .

<i>Eigenschaft</i>	<i>Re</i> klein	<i>Re</i> groß
Zähigkeit	linear	unabhängig
Geschwindigkeit	linear	quadratisch
Körperdimension	linear	quadratisch
Dichte des Fluids	unabhängig	linear

**Abb. 7.20.** Schematische Darstellung einer KARMANSchen Wirbelstraße: Hinter dem umströmten Körper entsteht ein langer Streifen, in dem sich die Flüssigkeit turbulent bewegt.

Dies gilt jedoch nur für nicht zu große REYNOLDSSche Zahlen  $Re = \frac{rv}{\nu}$ . Erhöht man bei konstantem Rohrdurchmesser die Flußgeschwindigkeit, ändert sich der Charakter der Bewegung vollständig, und man stellt einen vollständig regellosen, chaotischen Fluß fest: *turbulente Strömung*, was besonders deutlich wird, wenn man der strömenden Flüssigkeit ein gefärbtes Medium zusetzt, das sich sehr rasch verteilt. Damit überträgt sich auch der *Impuls* bedeutend schneller, und man beobachtet bei turbulenter Strömung ein konstantes Geschwindigkeitsprofil, das im Randbereich steil abfällt. Folglich spielt bei höheren Geschwindigkeiten die innere Reibung eine bedeutend geringere oder gar keine Rolle mehr! Die Flüssigkeiten verhalten sich so, als sei die Zähigkeit sehr klein. Damit ist die einzige Kombination aus  $r, \rho$  und  $v$  für die Widerstandskraft  $F$ :

$$F = \text{const} \cdot \rho r^2 v^2 \quad (7.64)$$

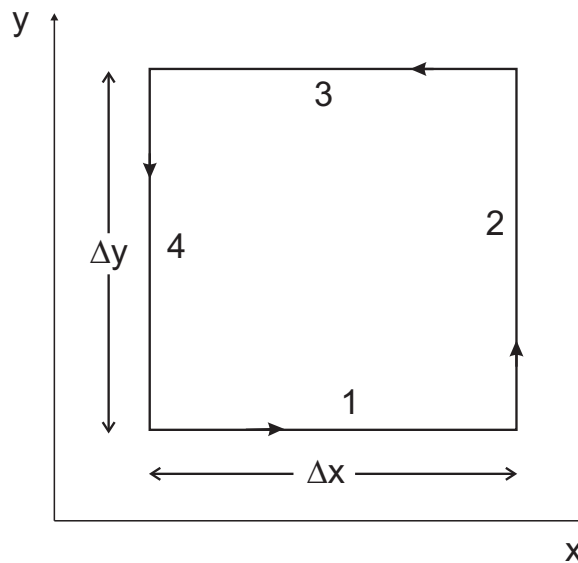
Die Widerstandskraft ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional (NEWTONSches Widerstandsgesetz) (s. Tabelle 7.2).

Außerdem hängt bei großen REYNOLDSSchen Zahlen die Widerstandskraft sehr stark von der Form des Körpers ab, da durch sie die *Abrißkanten* der *Stromlinien* bestimmt werden und damit die Breite der *Wirbelstraße* (schemat. Darstellung in Abb. 7.20).

Je enger der „Nachlauf“ ist, desto kleiner die mit ihm verbundene Widerstandskraft. Daher verjüngen sich derartige gut konstruierte Körper in Flußrichtung, während das Profil an der Stirnseite relativ breit ist. Die am Körper vorbeigleitende Strömung schließt sich an dessen Ende ohne Wirbelbildung; daher erhöht sich der Druck in

Strömungsrichtung im geringst möglichen Maße (diese Überlegung gilt nur für Geschwindigkeiten, die klein gegen die Schallgeschwindigkeit sind).

**Beispiel 7.1.** Eine quadratische Holzscheibe treibe in einer laminaren Strömung ( $x$ -Richtung). Dann entsteht an der Stirnseite ein Strömungswiderstand mit Überdruck und an der Heckseite ein Unterdruck, und beide führen dazu, daß die Holzscheibe sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = dv/dx$  dreht. Zeigt die Strömung nur in eine Richtung, dann ist die zur Strömungsrichtung transversale Geschwindigkeitsänderung, die die auf dem Flächenelement senkrecht stehende Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bestimmt, zusammengesetzt aus zwei Komponenten, einer, mit der die Zunahme der Geschwindigkeit senkrecht zur Flußrichtung, also in  $y$ -Richtung, und einer, mit der die Abnahme der Geschwindigkeit in Flußrichtung, also in  $x$ -Richtung, beschrieben wird. Um das quantitativ zu machen, wollen wir das Linienintegral eines Umlaufs bestimmen, wir bilden also die Zirkulation (Abb. 7.21):



**Abb. 7.21.** Berechnung des Linienintegrals für einen vollständigen Umlauf.

$$\oint \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s} = \omega_x(1)\Delta x + \omega_y(2)\Delta y - \omega_x(3)\Delta x - \omega_y(4)\Delta y. \quad (7.65)$$

Als nächstes fassen wir die jeweils gegenläufigen Stücke 1 und 3 sowie 2 und 4 zusammen und bilden die Differenz:

$$(\omega_x(1) - \omega_x(3))\Delta x \wedge (\omega_y(2) - \omega_y(4))\Delta y, \quad (7.66)$$

die, wenn wir eine Änderung von  $\omega$  zulassen, nicht Null sind, sondern bei einer linearen Änderung

$$\omega_x(3) = \omega_x(1) + \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \Delta y \quad (7.67.1)$$

und

$$\omega_y(4) = \omega_y(2) - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \Delta x \quad (7.67.2)$$

ergeben. Für die Differenzen in Gln. (7.51) können wir also schreiben:

$$(\omega_x(1) - \omega_x(3)) \Delta x = -\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (7.68.1)$$

und

$$(\omega_y(2) - \omega_y(4)) \Delta y = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \Delta x \Delta y, \quad (7.68.2)$$

womit sich für die Zirkulation um das vollständige Quadrat

$$\left( \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (7.69)$$

ergibt. Die beiden Summanden in der Klammer sind Glieder des Vektorprodukts zwischen  $\nabla$  und  $\omega$ , das senkrecht auf den Komponenten von  $\omega$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung steht, also in  $z$ -Richtung, und  $\Delta x \Delta y$  ist die Fläche des Quadrats.

$$(\nabla \times \omega)_z \Delta A = \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y, \quad (7.70)$$

deren linke Seite daher als

$$(\nabla \times \omega) \cdot \mathbf{n} \Delta A \quad (7.71)$$

mit  $\mathbf{n}$  als Einheitsvektor, der senkrecht auf dem Flächenelement  $dA$  steht. In integraler Form sieht das Ergebnis dann so aus (Satz von STOKES):

$$\oint \boldsymbol{\omega} d\mathbf{s} = \int \int (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) d\mathbf{A} \quad (7.72)$$

In den Kapiteln 3 und 4 hatten wir eine konservative Kraft definiert und festgestellt, daß das Kraftfeld dann ein Potential hat, wenn

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0. \quad (7.73)$$

Nach dem Satz von STOKES ist für jeden Vektor

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int \int (\nabla \times \mathbf{v}) d\mathbf{A}, \quad (7.74)$$

woraus sich entscheidende Tatsachen ableiten lassen:

- Ein Kraftfeld besitzt dann ein (skalares) Potential, wenn seine Rotation überall verschwindet:

**Satz 7.1** Wenn  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ , dann gibt es immer ein skalares Feld  $\phi$ , so daß gilt  $\mathbf{A} = \nabla \phi$ , da  $\nabla \times (\nabla \phi) = (\nabla \times \nabla) \phi = 0$ .<sup>5</sup>

<sup>5</sup>In Komponenten aufgespaltet, sieht das etwa für die  $z$ -Koordinate so aus:

- Ein Wirbelfeld ist frei von (skalaren) Potentialen:

**Satz 7.2** Wenn  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , dann gibt es immer ein vektorielles Wirbelfeld  $\phi$ , so daß gilt  $\mathbf{A} = \nabla \times \phi$ , da immer gilt  $\nabla \cdot (\nabla \times \phi) = 0$ , weil der in Klammern stehende Produktvektor senkrecht auf  $\nabla$  steht.

## 7.5 Aufgaben und Lösungen

### 7.5.1 Deformation fester Körper

**Aufgabe 7.1** Gegeben ein Kupferdraht (zylindrisch,  $E = 1,2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, POISSON-Zahl: 0,34) der Länge 1 m und dem Durchmesser 1 mm, der am oberen Ende eingespannt ist. Am unteren Ende wird eine Masse von 10 kg befestigt. Bestimmen Sie die relative Änderung von

- Länge,
- Querschnittsfläche und
- Volumen ( $g = 10$  m/sec<sup>2</sup>)!

**Lösung.**

$$p = \frac{F}{A} = \frac{100}{\pi 0,25 \cdot 10^{-6}} = 1,27 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (1)$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E} = 1,06 \cdot 10^{-3}. \quad (2)$$

$$\frac{\Delta r}{r} = -m \frac{\Delta l}{l} \quad (3)$$

$$\Delta A = \pi[(r + \Delta r)^2 - r^2] \approx 2\pi r \Delta r. \quad (4)$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \frac{\Delta r}{r} = -2m \frac{\Delta l}{l} = -0,72 \cdot 10^{-3}. \quad (5)$$

Damit ergibt sich ein  $\Delta V$  von

$$\Delta V = (A + \Delta A)(l + \Delta l) - Al \approx l\Delta A + F\Delta l. \quad (6)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2m) = 0,34 \cdot 10^{-3}. \quad (7)$$

---


$$[\nabla \times (\nabla \phi)]_z = \nabla_x(\nabla \phi)_y - \nabla_y(\nabla \phi)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0.$$

**Aufgabe 7.2** Schätzen Sie ab, wie lang ein Stahlseil höchstens sein kann, bevor es unter seinem eigenen Gewicht zerreißt (Zugfestigkeit etwa 7000 bar, Dichte etwa  $7,7 \text{ g/cm}^3$ )?

**Lösung.** Länge  $L$ , also ist  $\sigma = \rho g L$  oder

$$L_{\max} = \frac{\sigma}{\rho g} = 9270 \text{ m.} \quad (1)$$

**Aufgabe 7.3** Das Stahlseil sei nun lediglich 10 m lang. Wie groß ist seine Dehnung unter dem Einfluß der Schwerkraft, wenn es an einem Ende aufgehängt ist ( $\rho = 7,7 \text{ g/cm}^3$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ )?

**Lösung.**

$$F = mg \wedge \sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{mg}{A}, \quad (1)$$

Die Masse ist kontinuierlich über der Länge des Seils verteilt, von  $x = 0$  am obersten Ende bis  $x = L$  am untersten Ende. Denken wir uns zunächst das Seil diskontinuierlich in  $n$  einzelne, gleiche Scheibensegmente der Dicke  $\Delta x$  zerteilt, so daß

$$L = n\Delta x, \quad (2)$$

ist der Beitrag zur Gewichtskraft der untersten Scheibe ist  $\rho A n \Delta x$ , der der obersten Scheibe  $\rho A(L - L)$ , von Scheiben, die dazwischen liegen,  $\rho A(L - i\Delta x)$ , allgemein also

$$m = \sum_{i=0}^{i=n} \rho A(L - i\Delta x), \quad (3)$$

oder kontinuierlich:

$$m = \frac{\rho A}{L} \int_{x=0}^{x=L} (L - x) dx. \quad (4)$$

Damit ergibt sich für die Spannung

$$\sigma = \frac{\rho g A}{L A} \int_{x=0}^{x=L} (L - x) dx = \rho g \frac{L}{2}, \quad (5)$$

also die Hälfte des Wertes, der sich bei Belegung eines Massenpunktes am Ende des (gewichtlosen) Seils ergeben würde, woraus für die relative Längenänderung

$$\Delta L = L \frac{\sigma}{E} = \frac{\rho g L^2}{E} \frac{1}{2}. \quad (6)$$

folgt. Interessanterweise geht der Querschnitt des Seiles nicht ein. Mit den Daten für Stahl ergibt sich schließlich

$$\Delta L = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ cm.} \quad (7)$$

**Aufgabe 7.4** Wie groß muß die Last sein, damit sich ein gewichtsloses, 10 m langes Stahlseil mit  $0,5 \text{ mm}^2$  Durchmesser um 1,9 cm verlängert? Wie schwer ist das Seil wirklich?

**Lösung.**

$$\frac{\Delta L}{L} \cdot E \cdot A = F. \quad (1)$$

$$F = 95 \text{ N} \Rightarrow m \approx 10 \text{ kg}. \quad (2)$$

$$m = 7,7 \cdot 10^3 \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ g} = 0,61 \text{ g}. \quad (3)$$

**Aufgabe 7.5** Beschreiben Sie den erstaunlichen Widerstand gegen Verbiegungen zwischen einem Vollstab des Radius  $R$  und einem Rohr des Radius  $R$  und der Wandstärke  $R-r$  über das *Trägheitsmoment der Fläche*  $I = \int r^2 dA = 2\pi \int r^2 d(r^2) = 2\pi \int r^3 dr$ . Rechnen Sie für ein Rohr mit einer Wandstärke von 10 % des Durchmessers!

**Lösung.** Der Vollstab und das Rohr haben das Flächenträgheitsmoment

$$I = \frac{2\pi}{4} R^4 \wedge I = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4), \quad (1)$$

was z. B. für ein Rohr mit einer Wandstärke von 10 % des Durchmessers noch ein Trägheitsmoment von 65 % des Vollstabes bedeutet.

## 7.5.2 Hydro- und Aerostatik

**Aufgabe 7.6** Beschreiben Sie das ARCHIMEDISCHE Prinzip mittels der Krone der Stadt Syrakus! Gehen Sie von einer Masse von 1000 g aus und setzen Sie die Dichten von Gold und Silber als bekannt voraus ( $\rho_{\text{Au/Ag}} = 19,3/10,51 \text{ g/cm}^3$ )! DIONYSOS glaubte, eine Krone aus geringerwertigem als 18-karätigem Gold (750 Teile Au auf 250 Teile Silber (Gewicht!!)) zu tragen. Wie überführte ARCHIMEDES den Goldschmied?

**Lösung.** Die Krone verdrängt so viel Wasser, wie ihrem Volumen entspricht. Bei einer Krone aus 18-karätigem Gold also ( $\rho = m/V \Rightarrow V = m/\rho$ ):

$$\frac{750}{19,3} + \frac{250}{10,51} = 62,65 \text{ cm}^3 \text{ H}_2\text{O}. \quad (1)$$

Hätte der Goldschmied also 250 g Gold aus dem Staatsbesitz privatisiert und durch Silber kompensiert, würde bei gleichem Volumen die Krone nur

$$10,51 \cdot \left( 62,65 \text{ cm}^3 - \frac{500}{19,3} \right) = 386,1 \text{ g Ag} \Rightarrow M = 500 + 386,1 = 889,1 \text{ g} \quad (2)$$

gewogen haben.

**Aufgabe 7.7** Bestimmen Sie den Bruchteil des Eisbergs ( $\rho_{\text{Eis}} = 0,92 \text{ g/cm}^3$ ), der aus dem Salzwasser der Dichte  $1,033 \text{ g/cm}^3$  herausragt!

**Lösung.** Hydraulische Waage:

$$\frac{F_{\text{Eis}}}{F_{\text{Wasser}}} = 1 - \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{Wasser}}} = 10,9 \%. \quad (1)$$

**Aufgabe 7.8** Tante Paula ( $m = 120 \text{ kg}$ ,  $\rho = 1,1 \text{ g/cm}^3$ ) trimmt sich allmorgendlich im heimischen Pool ( $A = 25 \text{ m}^2$ ,  $V_{\text{H}_2\text{O}} = 50 \text{ m}^3$ ). Wie verändert sich der Wasserpegel beim Schwimmen der Walküre (sie spielt gern *dead man's float*)? Wie würde er sich beim letzten Herzschlag der lieben Tante ändern?

**Lösung.** Solange Tante Paula schwimmt, verdrängt sie so viel Wasser, wie ihrer Masse entspricht, also

$$V = 120 \text{ l H}_2\text{O}. \quad (1)$$

Damit erhöht sich der Pegelstand um

$$\frac{50 \cdot 120}{2 \cdot 500} \text{ dm} - 20 \text{ dm} = 0,48 \text{ cm}. \quad (2)$$

Bei SOS wird nur das Wasservolumen verdrängt, also 109 l. Damit sinkt der Pegel um 0,4 mm, bezogen auf den *Status quo ante* steht er nun bei 200,44 cm.

**Aufgabe 7.9** Die Dichten von Mittelmeer, Schwarzem Meer und Donau sind  $1,028 \text{ g/cm}^3$ ,  $1,014$  und  $1,000 \text{ g/cm}^3$ . Wieviel trägt also die Donau weniger als die beiden Quasi-Binnenmeere? Was bedeutet das für ein vollbeladenes Schiff mit 1 000 t bei der Fahrt von Piräus in die Donaumündung?

**Lösung.** Schwimmen bedeutet: Wasserverdrängung in l = Schiffsmasse in kg. Im Mittelmeer wird also um

$$\frac{m}{\rho} = 2,7 \% \quad (1)$$

weniger Meerwasser verdrängt als in der Donau, während das Schwarze Meer mit 1,4 % dazwischen liegt. Ein 1 000 t wiegendes, vollbeladenes Schiff, das im Mittelmeer gerade nicht untergeht, muß sich also bei der Einfahrt in den Bosphorus um 1,4 t und bei Einfahrt in die Donaumündung um weitere 1,3 t entledigen, um nicht unterzugehen.

**Aufgabe 7.10** Ein Körper bringe an Luft ( $\rho = 1,3 \text{ g/l}$ ) 5 g „auf die Waage“, in Wasser 2,85 g. Wie hoch ist seine Dichte?

**Lösung.** Indizes: L: Luft, O: Objekt, W: Wasser, G: Gewicht, A: Auftrieb

$$F_L = F_G - F_{AL} = \rho_O V_O g - \rho_L V_O g \approx \rho_O V_O g, \quad (1)$$

$$F_W = F_G - F_{AW} = \rho_O V_O g - \rho_W V_O g = V_O (\rho_O - \rho_W) g. \quad (2)$$

$$\frac{\rho_O - \rho_W}{\rho_O} = \frac{2,85}{5} \Rightarrow \rho_O = 2,33 \text{ g/cm}^3. \quad (3)$$

**Aufgabe 7.11** Berechnen Sie den Druck, den eine Nadelspitze ausübt, wenn der Durchmesser  $100 \mu\text{m}$  beträgt und die Belastung 1 N beträgt!

**Lösung.** Die Fläche ist  $8 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2$ , damit beträgt der Druck 1250 bar, und jedes Nadelmateriale wäre längst verbogen!

**Aufgabe 7.12** Der Luftdruck auf N.N. kommt durch das Gewicht einer sich nach oben verdünnenden Luftsäule zustande und kann genähert über die Barometerformel berechnet werden. Wäre die Dichte ( $\rho_{\text{N.N.}} = 1,3 \text{ g/l}$ ) höhenunabhängig: in welcher Höhe hätten wir „Vakuum“? Wie hoch ist der Druck dort tatsächlich, bezogen auf  $p_0$  bei N.N.? In welcher Höhe ist der Druck auf die Hälfte abgefallen?

**Lösung.**

$$h_0 = \frac{p_0}{\rho_{\text{N.N.}} g} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{1,3 \cdot 9,81 \text{ g/l m/sec}^2} \approx 7840 \text{ m}. \quad (1)$$

Tatsächlich ist aber in dieser Höhe der Druck erst auf ein e-tel abgefallen, also auf etwa 37 %:

$$p(h) = p_0 e^{-h/h_0}. \quad (2)$$

Die „Halbwertshöhe“ für  $p = 1/2 p_0$  liegt bei

$$h = h_0 \ln 2 = 5433 \text{ m}. \quad (3)$$

**Aufgabe 7.13** Bei einer hydraulischen Presse ist der statische Druck im Gesamtsystem konstant. Bei einer Übersetzung von 10:1: Wie hoch ist die Kraft, die man aufwenden muß, um eine gut ausgestattete S-Klasse von 2000 kg um 150 cm hochzuheben, wenn der Stempel der Hebebühne einen Durchmesser von 20 cm hat und der

Hebelweg 100 cm lang ist? Wie hoch muß der Druck der Pressluft sein, um einem die Arbeit abzunehmen?

**Lösung.**

$$A_1 = \pi r_1^2 = 314 \text{ cm}^2. \quad (1)$$

$$A_2 = 31,4 \text{ cm}^2 \Rightarrow r_2 = 3,16 \text{ cm}. \quad (2)$$

Damit muß die Bühne mit

$$\frac{2000 \cdot 9,8}{3,14} \cdot 10 = 6,25 \text{ bar} \quad (3)$$

abgedrückt worden sein. Die geleistete Arbeit ist

$$W = 2000 \cdot 1,5 = 29,4 \text{ kJ}, \quad (4)$$

was bei einem Hebelweg von 100 cm 147 Zügen a 200 N entspricht. Mit Preßluft von

$$p = \frac{F}{A_2} = 94 \text{ bar} \quad (5)$$

geht die Sache einfacher.

**Aufgabe 7.14** Sie sollen hundert Eisenwürfel aus Eisen mit der Kantenlänge von jeweils 20 cm ( $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ ) auf einem Floß aus Tannenstämmen ( $\rho = 0,5 \text{ g/cm}^3$ ) flußabwärts transportieren. Wie groß muß das Volumen an Tannenholz sein, um das Floß in Wasser ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ) gerade schwimmend zu halten? Wieviel Stämme mit 20 cm Durchmesser und 5 m Länge werden benötigt?

**Lösung.** Bedingung für Schwimmen: Gewicht von Holz + Eisen = Gewicht des verdrängten Wassers. Es wird gerade das Wasservolumen verdrängt.

$$V_{\text{Holz}}\rho_{\text{Holz}} + V_{\text{Fe}}\rho_{\text{Fe}} = m_{\text{H}_2\text{O}} = (V_{\text{Holz}} + V_{\text{Fe}})\rho_{\text{H}_2\text{O}}, \quad (1)$$

$$V_{\text{Holz}} = V_{\text{Fe}} \frac{\rho_{\text{Fe}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} - \rho_{\text{Holz}}} = 10\,880 \text{ l} \Rightarrow m_{\text{Holz}} = \rho_{\text{Holz}} V_{\text{Holz}} = 5\,440 \text{ kg}. \quad (2)$$

$$V_{\text{Stamm}} = \pi r^2 l = 157 \text{ l}. \quad (3)$$

$$N = 70 \text{ Staemme}. \quad (4)$$

### 7.5.3 Hydrodynamik

**Aufgabe 7.15** Wenn die maximale Strömungsgeschwindigkeit in einem Rohr des Radius  $R$  bei laminarem Fluß

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \quad (1)$$

beträgt: Wie hoch ist die über das ganze Rohr gemittelte Geschwindigkeit?

**Lösung.** Der Volumenstrom über das Rohr ist nach HAGEN-POISSEUILLE

$$V(r) = \frac{\pi \Delta p}{4 L \eta} \left( \frac{R^4 - r^4}{2} \right) = \frac{\pi \Delta p}{8 L \eta} (R^4 - r^4). \quad (2)$$

Damit ist die durch die Fläche  $\pi R^2$  gemittelte Fließgeschwindigkeit ( $v(r=0) = 0$ ):

$$\langle v \rangle = \frac{V(r)}{\pi R^2} = \frac{1}{2} v_{\max}. \quad (3)$$

**Aufgabe 7.16** Schätzen Sie ab, wann das Low-Density Cholesterin in der Aorta gefährlich werden kann! Normalwerte:  $\emptyset$ : 15 mm,  $v \approx 10$  cm/sec,  $\nu = 70$  /min,  $V = 50$  cm<sup>3</sup>,  $\eta = 8$  cP.

**Lösung.** Man findet nach

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta} = \frac{v l}{\nu} \quad (1)$$

eine REYNOLDSSche Zahl von etwa 200, d. h. sicher auf der laminaren Seite. Probleme entstehen entweder bei der Zunahme der Viskosität um den Faktor 9 oder die Reduzierung des Rohrquerschnitts.

**Aufgabe 7.17** Wieso stoßen oft zwei nahe, vor Anker liegende, Schiffe zusammen? Wann ist oft?

**Lösung.** Da sich zwischen den Schiffen der Stromquerschnitt verengt, muß das Wasser bei Vorhandensein einer Strömung (z. B. Flut- oder Ebbestrom) dort schneller strömen  $\Rightarrow$  BERNOULLI-Sog, Beispiel für das *Hydrodynamische Paradoxon*. Sei die Flußgeschwindigkeit  $v$ , die sich in der Enge auf  $u$  steigere, ergäbe sich ein Sog von

$$p = \frac{1}{2} \rho (u^2 - v^2). \quad (1)$$

**Aufgabe 7.18** Monsunregen mit großen Tropfen fällt nach dem NEWTONSchen Reibungsgesetz mit  $F_R = \pi r^2 v^2 \rho$ , Staubregen dagegen nach STOKES mit  $F_R = 6\pi \eta r v$ . Bestimmen Sie die Größe des Umschlagradius! Wie hoch ist die Endgeschwindigkeit eines Tropfens mit 2 mm, die eines Hagelkornes von 2 cm Durchmesser (vernachlässigen Sie den zwiebelförmigen Aufbau desselben und rechnen Sie mit einer Dichte von 1 g/cm<sup>3</sup>!)?

**Lösung.** Die Geschwindigkeit beider Tropfengrößen wird gleich bei einem Radius von

$$r = \sqrt[3]{\frac{27\eta^2}{\rho_{\text{Luft}}\rho g}}, \quad (1)$$

also bei einem Wert von etwa 100  $\mu\text{m}$  (Verhältnis der Dichten etwa Faktor 1000). Damit werden die Geschwindigkeiten kleiner Tropfen nach

$$v = \frac{2}{9} \frac{r^2 \rho g}{\eta} = \frac{r^2 g}{\nu}, \quad (2)$$

die großer Tropfen nach

$$v = \sqrt{\frac{4r \rho g}{3\rho_{\text{Luft}}}} \approx 100\sqrt{r} \quad (3)$$

bestimmt, was für einen 2 mm im Durchmesser messenden Tropfen eine Endgeschwindigkeit von 3,2 m/sec, für ein Hagelkorn von 2 cm dagegen eine Endgeschwindigkeit von 10 m/sec ausmacht.

**Aufgabe 7.19** BERNOULLI-Gleichung: Die Summe aus Staudruck, statischem Druck und hydrostatischem Druck ist innerhalb eines Systems konstant:

$$(p_1 = p_0 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2) = (p_2 = p_0 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2).$$

Ein nach oben hin geschlossener zylindrischer Behälter des Querschnitts  $A$  ist teilweise mit Bier ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ) gefüllt (Höhe  $h_1$ ). Am Boden bei  $h = 0$  befindet sich das Ventil mit Zapfhahn, dessen Querschnittsfläche  $a$  sehr klein gegenüber der Querschnittsfläche  $A$  des Fasses sein soll, so daß die Fließgeschwindigkeit innerhalb des Fasses Null ist.

- Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  strömt das Bier in den Außenbereich mit dem Luftdruck  $p_0$  aus?
- Beschreiben Sie die Bahnkurve, wenn der Auslaß sich in der Höhe  $h_2$  über dem Boden befindet!

**Lösung.**

BERNOULLI-Gleichung:

$$p + \rho gh + (\frac{1}{2}\rho v_1 = 0) = p_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2. \quad (1)$$

$$p - p_0 + \rho gh = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 \left( gh + \frac{p - p_0}{\rho} \right)}. \quad (2)$$

Die Höhe  $h_2$  ermöglicht eine Weite  $x$  von

$$x = \sqrt{\frac{2v_0 h_2}{g}}. \quad (3)$$

**Aufgabe 7.20** BERNOULLI-Gleichung: Die Summe aus Staudruck, statischem Druck und hydrostatischem Druck ist innerhalb eines Systems konstant:

$$(p_1 = p_0 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2) = (p_2 = p_0 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2).$$

Ein nach oben hin geschlossener zylindrischer Behälter des Querschnitts  $A$  ist teilweise mit Bier ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ) gefüllt (Höhe  $h$ ). Am Boden bei  $h = 0$  befindet sich das Ventil mit Zapfhahn, dessen Querschnittsfläche  $a$  sehr klein gegenüber der Querschnittsfläche  $A$  des Fasses sein soll, so daß die Fließgeschwindigkeit innerhalb des Fasses Null ist.

- Mit welcher Geschwindigkeit strömt das Bier in den Außenbereich mit Luftdruck  $p_0$  aus, wenn der Druck im Faß konstant bleibt?
- Welcher Kraft- oder Rückstoß (Impuls/pro Zeit  $\Delta p/\Delta t$ ) wirkt dabei auf den Behälter?
- Nach welcher Zeitfunktion sinkt der Pegel, wenn  $p = p_0$ ?

**Lösung.** BERNOULLI-Gleichung:

$$p + \rho gh + (\frac{1}{2}\rho v_1 = 0) = p_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (1)$$

$$p - p_0 + \rho gh = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \left( gh + \frac{p - p_0}{\rho} \right)}. \quad (2)$$

Die pro Zeitintervall  $\Delta t$  ausfließende Menge  $\Delta m$  wird von der Geschwindigkeit Null auf  $v_2$  beschleunigt, also ist der Rückstoß

$$F = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \rho A v_2^2. \quad (3)$$

Das pro Sekunde mit der Geschwindigkeit  $v_2$  ausfließende Volumen erniedrigt den Pegel im Faß:

$$a v_2 = -A \frac{dh}{dt} \Rightarrow v_2 = -\frac{A}{a} \frac{dh}{dt}. \quad (4)$$

Damit wird mit der Nebenbedingung  $p = p_0$ :

$$-\frac{A}{a} \frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh}, \quad (5)$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{a}{A} dt. \quad (6)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2g}} \sqrt{h} = -\frac{a}{A} t + \text{const.} \quad (7)$$

Die Höhe soll bei  $t = 0$  die Größe  $h_0$  haben, also ist die Konstante

$$\text{const} = \sqrt{\frac{2}{g} h_0}. \quad (8)$$

Also wird für  $h$ :

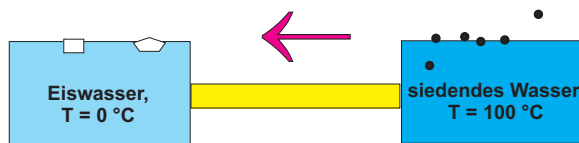
$$h = \frac{g}{2} \left( \sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{a}{A} t \right)^2. \quad (9)$$



# 8 Transportphänomene

## 8.1 Thermisches Gleichgewicht

Ein *abgeschlossenes System* befindet sich dann in *thermischem Gleichgewicht*, wenn Temperatur und Druck überall gleich sind. Ein *offenes System* tauscht sich mit seiner Umgebung so lange aus, bis Druck und Temperatur sich angeglichen haben. Um Druckunterschiede auszugleichen, fließen Molekeln (Sammelbegriff für Atome und Moleküle) von einem Hochdruck- in ein Tiefdruckgebiet, fließen aus einem „heiße“ Gebiet Molekeln in ein „kaltes“ Gebiet (Abb. 8.1). Die dabei ablaufenden Vorgänge heißen *kinetische Prozesse*. Da das System dabei von einem Zustand des Ungleichgewichts in einen Zustand des Gleichgewichts übergeht, sind diese Vorgänge *irreversibel*.



**Abb. 8.1.** Was sind die mikroskopischen Prozesse, die dafür sorgen, daß die Wärme von *heiß* nach *kalt* fließt?

## 8.2 Diffusion

In einer Lösung, deren Konzentration sich von Ort zu Ort ändert, finden Durchmischungsprozesse statt, da die Molekeln der gelösten Substanz durch die chaotische Wärmebewegung sich von Orten höherer Konzentration nach Orten niedrigerer Konzentration bewegen, bis die Lösung überall dieselbe Zusammensetzung aufweist. Dieser Prozeß wird *Diffusion* genannt, und wir schreiben für die Dichte des Diffusionsstroms:

$$j = -D\nabla c, \quad (8.1)$$

mit  $D$  dem Diffusionskoeffizienten, der die Dimension

$$[D] = \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \quad (8.2)$$

aufweist und damit die gleiche Dimension wie die kinematische Zähigkeit, mit der wir die Diffusion der Geschwindigkeit durch eine Flüssigkeit beschrieben haben. Die Flüssigkeit bleibt dabei insgesamt in Ruhe.

### 8.3 Konvektion

Eine Durchmischung kann auch durch die Wirkung des Schwerfeldes erreicht werden. So hat eine Lösung von Kupfersulfat eine höhere Dichte als Wasser. Schichtet man auf eine derartige blaue Lösung vorsichtig Wasser, findet durch Diffusion ein langsamer Konzentrationsausgleich statt. Gießt man dagegen eine Lösung von Kupfersulfat vorsichtig auf Wasser, sinkt die blaue Lösung wesentlich schneller nach unten, während Wasser aufsteigt (*Konvektion*).

### 8.4 Wärmeleitung und Wärmeleitfähigkeit

Mit der Diffusion verwandt ist der Prozeß der Wärmeleitung. Nach dem thermodynamischen Stabilitätskriterium werden in einem System Temperaturunterschiede durch einen Wärmefluß ausgeglichen. Dabei stoßen Moleküle der stärker erwärmten Bereiche mit denen der benachbarten schwächer erwärmten zusammen und übertragen ihnen einen Teil ihrer Energie. Das Medium (System, Körper) bleibt auch hierbei selbst in Ruhe, wenn keine Druckunterschiede vorliegen, und wir definieren die Wärmestromdichte  $Q$ , die mit dem Temperaturgradienten über

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx} \quad (8.3)$$

zusammenhängt: der Wärmestrom ist der Richtung zunehmender Temperatur entgegengesetzt gerichtet, und die Wärme fließt in der Richtung der abnehmenden Temperatur.  $\kappa$  ist dabei die Wärmeleitfähigkeit. Wird die Wärmestromdichte in  $\text{J}/\text{m}^2\text{sec}$  gemessen, ergibt sich die Dimension von  $\kappa$  zu

$$[\kappa] = \frac{\text{J}}{\text{m sec K}}. \quad (8.4)$$

Weil die Temperaturänderung eines Körpers aber gleich der aufgenommenen (abgegebenen) Wärmemenge, dividiert durch seine Wärmekapazität, ist, wird die Geschwindigkeit des Temperatúrausgleichs durch die Größe

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho C_p} \quad (8.5)$$

bestimmt ( $\rho$  die Dichte und  $C_p$  der Wärmekapazität pro Masseneinheit), die hier nach unserer Voraussetzung für konstanten Druck verwendet wird. Daher bezeichnen wir die Größe  $\chi$  als Temperaturleitfähigkeit. Sie hat die Dimension

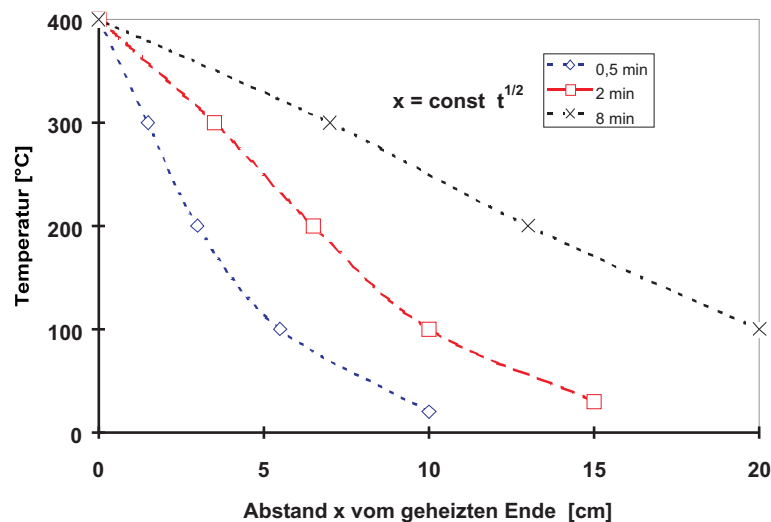
$$[\chi] = \frac{\text{J}}{\text{m sec K}} \cdot \frac{\text{m}^3 \text{kg K}}{\text{kg J}} = \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \quad (8.6)$$

und stimmt mit derjenigen des Diffusionskoeffizienten überein.  $\chi$  hat also die Bedeutung eines Diffusionskoeffizienten der Temperatur.

**Tabelle 8.1.** Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  für einige Substanzen bei Zimmertemperatur.

<i>Substanz</i>	$\kappa$ [J/m sec K]	<i>Substanz</i>	$\kappa$ [J/m sec K]
Wasser	0,6	Blei	35
Benzol	0,15	Eisen	75
Glas	0,4 – 0,8	Kupfer	380
		Silber	420

Man kann die Metalle deutlich von anderen Stoffen (Isolatoren) abgrenzen. Dies liegt an der großen Geschwindigkeit der „freien“ Elektronen in Metallen (etwa 1% der Lichtgeschwindigkeit), die die thermischen Geschwindigkeiten der Molekeln (Sammelbegriff für Atome und Moleküle), die zwischen 100 und 1000 m/sec liegen, bei weitem übertreffen.



**Abb. 8.2.** Nichtstationäre Wärmeleitung in einem runden Eisenstab (8 mm Durchmesser, 1 m Länge): Wie schnell kommt eine bestimmte Temperatur im Stab voran? Es braucht größenordnungsmäßig Minuten, bis sich ein stationäres Gleichgewicht einstellt.

## 8.5 Ausgleichszeit und Random Walk

In einer Flüssigkeit mit Konzentrationsgradienten finden also auf Grund der Diffusion Ausgleichsprozesse statt. Was ist deren zeitliche Größenordnung, oder von welchen Größen hängt diese Ausgleichszeit ab? Mögliche Einflußgrößen sind die

1. Konzentration  $c$ , der
2. Diffusionskoeffizient  $D$  und
3. Abmessungen des Gebiets mit Konzentrationsschwankungen, linear also  $L$ .

Die erste Variable, die Konzentration selbst, kann das nicht sein, denn je höher die Unterschiede der Konzentration, je steiler also der Gradient, umso größer die Dichte des Diffusionsstroms. Als einzige Größen bleiben also  $D$  und  $L$ , und die einzige Kombination dieser Größen, um die Dimension der Zeit zu erhalten ist

$$t \propto \frac{L^2}{D} \Rightarrow L \propto \sqrt{Dt}. \quad (8.7)$$

Das ist die Gleichung für den *Random Walk*. Obwohl die Bewegung der Molekeln innerhalb der Flüssigkeit vollständig chaotisch ist, erreichen also nach einer gewissen Zeit  $t$  bei gegebenem  $D$  im Mittel das Ziel  $L$ , das also als der mittlere Abstand anzusehen ist, um den sich *jede* Molekel in der Zeit  $t$  von der Anfangslage entfernt hat. Daher identifiziert man  $L^2$  mit dem sog. mittleren Verschiebungsquadrat  $\langle x^2 \rangle$ , das sich mit der thermischen Geschwindigkeit ausbreitet, die das Verhältnis zwischen der mittleren Verschiebung oder der mittleren freien Weglänge  $\langle x \rangle$  und der Zeit zwischen zwei Stößen  $\tau$  ist. Wir können also die Beziehungen

$$\langle x^2 \rangle = D\tau \wedge \langle x \rangle = v\tau \quad (8.8)$$

niederschreiben und erhalten daraus eine Beziehung zwischen  $D$ ,  $v$  und  $\langle x \rangle$ :

$$D \propto \langle x \rangle v. \quad (8.9)$$

## 9 Literatur

- I. Asimov: *Understanding Physics*, Barnes & Noble Books, New York, 1993
- R. Becker: *Vorstufe zur Theoretischen Physik*, Springer-Verlag, Berlin, 1972
- Feynman, Leighton, Sands: *The Feynman Lectures on Physics I*, 7th ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963
- Gerthsen: *Physik*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 2001
- S. Großmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1974
- F. Hund: *Grundbegriffe der Physik*, B-I-Taschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim 1969
- G. Joos: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Akadem. Verlagsgesellschaft, Geest & Portig, Leipzig, 1959
- L.D. Landau, A.I. Achieser, E.M. Lifschitz: *Mechanik und Molekularphysik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1970
- E. Lüscher: *Experimentalphysik I*, B-I-Taschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966
- E. Lüscher, H. Jodl: *Physik — Gestern Heute Morgen*, Heinz Moos Verlag, München 1971
- R.W. Pohl: *Experimentalphysik I*, 17. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 1969
- J. Schwinger: *Einsteins Erbe*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin 2000
- W. Walcher: *Praktikum der Physik*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1971